Il était une fois le logarithme népérien

La fonction inverse $\frac{1}{x}$ même restreinte à l'ensemble $]0;+\infty[$ n'est la dérivée d'aucune fonction que nous connaissions. Pourtant, étant dérivable donc continue sur cet intervalle, alors elle admet des primitives qui diffèrent toutes d'une constante. Qu'à cela ne tienne, nous allons remédier à cette lacune sur le champ !

Définition du logarithme népérien (ou naturel)
La fonction logarithme népérien notée ln est la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ dont $\underbrace{\text{la dérivée est la fonction inverse}}_{\forall x\in]0;+\infty[,\ \ln'(x)=1/x}$ et $\underbrace{\text{qui s'annule en 1}}_{\ln(1)=0}$.

Sa définition nous apporte déjà deux renseignements d'importance sur cette fonction ln :

- Comme sa dérivée $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ est strictement positive sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors la fonction ln est strictement croissante.
- Comme ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que $\ln(1)=0$, alors nous pouvons en déduire son signe :
  - ln est strictement négative avant 1, c'est-à-dire sur l'intervalle $]0;1[$.
  - ln est nulle seulement en $x=1$
  - ln est strictement positive après 1, c'est-à-dire sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Une esquisse de la courbe de la fonction ln...avec la méthode d'Euler

Aucun algorithme, aucun procédé de calcul ne nous permet de calculer le logarithme népérien d'un réel positif quelconque. Il nous est donc très difficile de tracer la courbe représentative de ln.
Par contre, nous pouvons construire une esquisse de cette courbe en utilisant la méthode d'Euler dont le principe a été déjà exposé pour la fonction exponentielle.
Rappelons-en le fondement : si un réel x_1 est proche d'un autre réel x_0 dont on connaît les image et nombre dérivé par une fonction dérivable f, alors une valeur approchée de l'image de x_1 par la fonction f est donnée :

$$f(x_1)\approx f(x_0)+f'(x_0)\times(x_1-x_0)$$

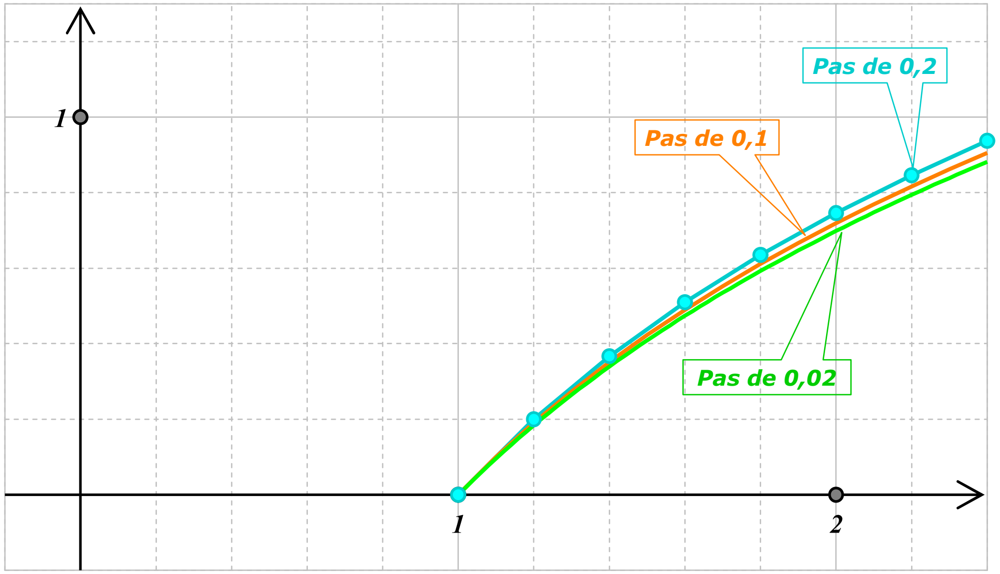
Ici, la fonction f est ln dont la dérivée est la fonction inverse. Par conséquent :

$$\ln(x_1)\approx\ln(x_0)+\frac{1}{x_0}\times(x_1-x_0)$$

Appliquons la méthode d'Euler en partant de $x_0=1$ avec un pas de progression de $0,2$.

- $\ln(1,2)\approx\ln(1)+\frac{1}{1}\times(1,2-1)=0+1\times0,2=0,2$
- $\ln(1,4)\approx\underbrace{\ln(1,2)+\frac{1}{1,2}\times(1,4-1,2)\approx0,2+\frac{5}{6}\times0,2=\frac{11}{30}}_{\text{Nous ne disposons que d'une valeur approchée de }\ln(1,2).}\approx0,367$
- $\ln(1,6)\approx\underbrace{\ln(1,4)+\frac{1}{1,4}\times(1,6-1,4)\approx\frac{11}{30}+\frac{5}{7}\times0,2=\frac{107}{210}}_{\text{Nous ne connaissons qu'une valeur approchée de }\ln(1,4).}\approx0,510$
- $\ln(1,8)\approx\underbrace{\ln(1,6)+\frac{1}{1,6}\times(1,8-1,6)\approx\frac{107}{210}+\frac{5}{8}\times0,2=\frac{533}{840}}_{\text{Nous n'avons qu'une valeur assez approchée de }\ln(1,6).}\approx0,635$
- $\ln(2)\approx\underbrace{\ln(1,8)+\frac{1}{1,8}\times(2-1,8)\approx\frac{533}{840}+\frac{5}{9}\times0,2=\frac{1879}{2520}}_{\text{Nous n'avons qu'une très vague approximation de }\ln(1,8).}\approx0,746$

Avec un pas de 0,2, nous obtenons qu'une valeur approchée de $\ln(2)$ est $0,746$. Mais approchée comment ? Car nous ignorons l'erreur commise !!!
En prenant un pas de progression plus faible, on diminue l'imprécision. Par contre, le volume des calculs augmente. C'est du boulot pour la machine.
Les esquisses de courbe obtenues avec des pas de 0,2 ; 0,1 et 0,02 sont tracées ci-dessous.
Les tracés semblent assez proches. Avec un pas de 0,02, on obtient : $\ln(2)\approx0,698$.



Le logarithme népérien d'une fonction u

Que se passe-t-il lorsque l'on compose notre logarithme népérien avec une fonction u ?
Déjà, il faut que la fonction u soit à valeurs positives, faute de quoi la composée $\ln\circ u$ n'a aucun sens puisque ln n'est définie que pour les réels strictement positifs.
Ensuite, si la fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors leur composée $\ln\circ u = v\circ u$ est aussi dérivable sur I. Pour tout réel $x \in I$, il vient :

$$(\ln\circ u)'(x) = (v\circ u)'(x) = u'(x)\times v'(u(x)) = u'(x)\times\frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

où $\left|\begin{array}{l} v(t)=\ln(t) \\ v'(t)=1/t \end{array}\right.$.

Voilà une dérivée bien sympathique qui mérite bien un théorème double !

Théorème : dérivée et primitives logarithmiques
Si la fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors :
1. La composée $\ln\circ u = \ln(u)$ est aussi dérivable sur cet intervalle I et :

$$(\ln\circ u)' = \frac{u'}{u} \quad\Leftrightarrow\quad \forall x\in I,\quad (\ln\circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

2. Une primitive de la fonction $\frac{u'}{u}$ sur l'intervalle I est la fonction $\ln\circ u = \ln(u)$.

Voyons sur quelques exemples, comment appliquer ce théorème.

1. Déterminons la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(7.x+3) = \ln(u(x))$.

Avant de dériver, il est indispensable de savoir où est-ce que f est dérivable.
La fonction $u(x) = 7.x+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Là, pas de problème !
Mais où cette fonction $u(x) = 7.x+3$ est-elle strictement positive ?

$$u(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad 7.x+3>0 \quad\Leftrightarrow\quad x>-\frac{3}{7} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left]-\frac{3}{7};+\infty\right[$$

Nous pouvons désormais appliquer le point ***1*** du théorème.
Comme la fonction $u(x) = 7.x+3$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]-3/7;+\infty[$, alors la fonction $f = \ln\circ u$ est dérivable sur cet ensemble.

Pour tout réel $x\in\left]-\frac{3}{7};+\infty\right[$, nous obtenons : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{7}{7.x+3}$

<u>Conséquence :</u> comme sa dérivée est strictement positive sur $]-3/7;+\infty[$, alors la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

Mais ça, nous pouvions l'obtenir sans calculer la dérivée de f car cette fonction est la composée de deux fonctions strictement croissantes :

$$\underset{\in]-3/7;+\infty[}{x} \xrightarrow[\text{Strictement croissante sur } \mathbb{R}]{u(t)=3.t+7} \underset{\in]0;+\infty[}{u(x)} \xrightarrow[\text{Strictement croissante sur }]0;+\infty[]{\ln} f(x)$$

2. Déterminons une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{2.x+1}$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-0,5\} = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Maintenant, si la fonction $\left|\begin{array}{l} u(x)=2.x+1 \\ u'(x)=2 \end{array}\right.$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle n'est strictement positive que sur l'intervalle $]-0,5;+\infty[$.

<u>Conclusion :</u> une primitive de $f(x) = \frac{1}{2.x+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{2}{2.x+1} = \frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}}_{\text{On fait apparaitre la formule...}}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ est la fonction $F(x) = \frac{1}{2}\times\ln(u(x)) = \frac{1}{2}\times\ln(2.x+1)$.

3. Et sur l'autre intervalle $]-\infty;-0,5[$, f n'a pas de primitive ?

Mais si f a une primitive ! Mais il va falloir transformer un peu son expression au préalable.
Comme $u(x) = 2.x+1$ est strictement négative sur l'intervalle $]-\infty;-0,5[$, alors son opposé $\left|\begin{array}{l} v(x)=-u(x)=-2.x-1 \\ v'(x)=-u'(x)=-2 \end{array}\right.$ est strictement positive sur cet ensemble !

Pour tout $x\in]-\infty;-1/2[$, nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{2.x+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{-2}{-2.x-1} = \frac{1}{2}\times\frac{v'(x)}{v(x)}}_{\text{On bricole pour faire apparaître la formule.}}$$

<u>Conclusion :</u> une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;-0,5[$ est la fonction $F(x) = \frac{1}{2}\times\ln(v(x)) = \frac{1}{2}\times\ln(-2.x-1)$.

<u>Note :</u> certains retiennent que si une fonction u est dérivable et non nulle sur un intervalle I (donc toujours du même signe), alors une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.

Les propriétés algébriques du logarithme népérien

Une des particularités de la fonction ln est qu'elle transforme les produits en sommes. Un peu le contraire de l'exponentielle...

Théorème : le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes
Pour tous réels strictement positifs a et b, nous avons :

$$\underbrace{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}_{\text{Le logarithme népérien du produit est égal à la somme des logarithmes népériens}}$$

La preuve de ce théorème

Soit b un réel strictement positif.
Pour établir le théorème, nous allons nous intéresser à la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x\times b)-\left[\ln(x)+\ln(b)\right]$$

Comme la fonction linéaire $\left|\begin{array}{l} u(x)=b\times x \\ u'(x)=b\end{array}\right.$ est dérivable et est $\underbrace{\text{strictement positive}}_{\text{La constante b est positive}}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors la composée $\ln\circ u(x)=\ln(u(x))=\ln(b\times x)$ est aussi dérivable sur cet ensemble. Pour tout réel strictement positif x, on a :

$$(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\cancel{b}}{\cancel{b}\times x}=\frac{1}{x}$$

Et par suite, tous ses termes étant dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors il en va de même pour la fonction f. Pour tout réel strictement positif x, il vient :

$$f'(x)=\underbrace{(\ln\circ u)'(x)-\ln'(x)-(\ln(b))'}_{\text{b étant fixé, } \ln(b) \text{ se comporte comme une constante.}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}-0=0$$

Comme sa dérivée est la fonction nulle sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors f est une fonction constante. Mais quelle constante ? Pour le savoir, calculons l'image de 1 par f.

$$f(1)=\ln(1\times b)-\ln(1)-\ln(b)=\cancel{\ln(b)}-0-\cancel{\ln(b)}=0$$

Donc f est la fonction nulle sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Ainsi nous venons d'établir que pour tous réels strictement positifs x et b, nous avons :

$$f(x)=\ln(x\times b)-\left[\ln(x)+\ln(b)\right]=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x\times b)=\ln(x)+\ln(b)$$

D'où le théorème !

Dans quelques instants, nous verrons comment utiliser ce théorème pour dériver certaines fonctions gentiment. En attendant, nous allons découvrir que cet énoncé a certaines conséquences sur d'autres opérations. Car quand on touche au produit, on touche aussi à toutes les opérations de sa grande famille.

Corollaire : d'autres propriétés (algébriques) du logarithme népérien

1. Le logarithme népérien de l'inverse est l'opposé du logarithme.

Pour tout réel strictement positif a : $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$

2. Le logarithme népérien du quotient est la différence des logarithmes.

Pour tous réels strictement positifs a et b : $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

3. Le logarithme népérien d'une puissance est le produit du logarithme par l'exposant.

Pour tout réel strictement positif a, pour tout entier relatif n : $\ln\left(a^n\right)=n\times\ln(a)$

4. Le logarithme népérien de la racine est la moitié du logarithme.

Pour tout réel strictement positif a : $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\times\ln(a)$

La preuve de ce corollaire

Le théorème précédent induit une cascade de conséquences ! Descendons-la !

1. Le logarithme népérien de l'inverse est l'opposé du logarithme.

Pour tout réel strictement positif a, nous pouvons écrire :

$$0=\ln(1)=\underbrace{\ln\left(\frac{1}{a}\times a\right)=\ln\left(\frac{1}{a}\right)+\ln(a)}_{\text{Le logarithme népérien du produit...}} \quad \text{d'où} \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$$

2. Le logarithme népérien du quotient est la différence des logarithmes.

Diviser, c'est multiplier par l'inverse. Et additionner l'opposé, c'est soustraire. Ainsi :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\underbrace{\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{b}\right)}_{\text{Le logarithme du produit...}}=\ln(a)+\underbrace{\left[-\ln(b)\right]}_{\text{le logarithme de l'inverse...}}=\ln(a)-\ln(b)$$

3. Le logarithme d'une puissance est le produit du logarithme par l'exposant.

Pour établir cette propriété, nous allons procéder en deux étapes suivant le signe de l'exposant entier n.
Si n est un entier naturel (non nul), alors la puissance nième du réel a est le produit de n facteurs a. Il vient alors :

$$\ln\left(a^n\right)=\overbrace{\ln\underbrace{(a\times a\times\ldots\times a)}_{\text{n facteurs}}=\underbrace{\ln(a)+\ln(a)+\ldots+\ln(a)}_{\text{n termes}}}^{\text{Le logarithme népérien d'un produit...}}=n\times\ln(a)$$

Donc la propriété est vraie pour les puissances positives. Quid des puissances négatives ?

Si n est un entier négatif, alors son opposé $p=-n$ est positif.

En combinant la propriété ***1*** et ce qui vient d'être établi, nous pouvons alors écrire :

$$\ln\left(a^n\right)=\ln\left(a^{-p}\right)=\ln\left(\frac{1}{a^p}\right)=\underbrace{-\ln\left(a^p\right)}_{\text{On applique la propriété } \mathit{1}.}=\underbrace{-\left[p\times\ln(a)\right]}_{\text{Car p est un entier positif.}}=-p\times\ln(a)=n\times\ln(a)$$

La propriété est donc aussi vraie pour les puissances négatives.

4. Le logarithme népérien de la racine est la moitié du logarithme.

Le carré de la racine d'un réel positif a est égal...à ce réel positif. Et alors :

$$\ln(a)=\ln\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right)=\underbrace{2\times\ln\left(\sqrt{a}\right)}_{\text{D'après la propriété } \mathit{3}.}\quad \text{d'où}\quad \ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\times\ln(a)$$

A quoi toutes ces belles propriétés algébriques (qui sont les réciproques de celles de l'exponentielle) peuvent-elles bien servir ? Et bien, à se simplifier la vie ! Quoique...

1. Déterminons les variations de la fonction $f(x)=\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)$.

Avant toute action, nous allons chercher où est-ce que cette fonction f est définie.
Comme le logarithme népérien n'est définie que sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors pour que le logarithme népérien de $u(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ ait un sens, il faut et il suffit que $u(x)$ soit strictement positif. Dressons son tableau de signe.

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$-$	||	$+$	

La fonction u n'est strictement positive que sur l'intervalle $]1;+\infty[$. C'est l'ensemble de définition de f. De facto, la dérivabilité des fonctions $\sqrt{x}$ et $x-1$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$ entraîne celle de u et donc celle de f.

Et maintenant, nous allons calculer la dérivée de u qui s'annonce...douloureuse !
Pour tout réel $x\in]1;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$u'(x)=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'\times(x-1)-(x-1)'\times\sqrt{x}}{(x-1)^2}=\ldots=\text{Ouf !}=\ldots=\frac{-x-1}{2.\sqrt{x}\times(x-1)^2}$$

Voilà bien un calcul peu agréable...qu'il est possible d'éviter en utilisant à bon escient les propriétés algébriques du logarithme népérien. Voyons comment !
Pour tout réel $x\in]1;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)=\underbrace{\ln\left(\sqrt{x}\right)-\ln(x-1)}_{\text{Logarithme d'un quotient}}=\underbrace{\frac{1}{2}\times\ln(x)}_{\text{Logarithme d'une racine}}-\ln(x-1)$$

La dérivée de f se calcule alors simplement. Pour tout réel $x\in]1;+\infty[$, il vient :

$$f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}-\frac{(x-1)'}{x-1}=\frac{1}{2.x}-\frac{1}{x-1}=\frac{(x-1)-2.x}{2.x\times(x-1)}=-\frac{x+1}{2.x\times(x-1)}$$

Comme les facteurs $x+1$; $2.x$ et $x-1$ sont positifs sur l'intervalle $]1;+\infty[$, alors la dérivée $f'(x)$ est négative sur cet ensemble.

<u>Conclusion :</u> la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

2. Recommençons la même chose avec la fonction $f(x)=\ln\left(\frac{2.x+4}{x-7}\right)$.

D'abord, dressons le tableau de signe du quotient $u(x)=\frac{2.x+4}{x-7}$.

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$2.x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$u(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Comme u est dérivable et strictement positive sur l'ensemble $]-\infty;-2[\cup]7;+\infty[$, alors la fonction $f=\ln(u)$ est dérivable sur cette réunion d'intervalles.

Maintenant, pour calculer simplement la dérivée de f, simplifions son écriture.
Pour tout réel $x\in]-\infty;-2[\cup]7;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\ln\left(\frac{2.x+4}{x-7}\right)=\ln(2.x+4)-\ln(x-7)$$

Or sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, les quantités $2.x+4$ et $x-7$ sont négatives. Donc leurs logarithmes népériens n'existent pas ! Ln est une fonction qui n'a de sens que pour les réels positifs.

<u>La morale de cette histoire :</u> avant d'employer une propriété algébrique de ln, il faut toujours s'assurer que tous les protagonistes sont strictement positifs.

Les limites de la fonction logarithme népérien

La fonction ln étant définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$, nous avons deux limites à chercher.

Théorème : les limites du logarithme népérien en 0 et $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

La conséquence de cette seconde limite est que l'axe des ordonnées, c'est-à-dire la droite verticale d'équation $x = 0$, est une asymptote à la courbe représentant ln.

La preuve de ce théorème

❶ La limite de ln en $+\infty$

Pour établir cette limite, nous allons utiliser à la définition d'une limite infinie à l'infini.
Soit M un réel strictement positif.
Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que $\ln(1) = 0$ alors

$\underbrace{\ln(2) > \ln(1)}_{\text{Croissance de ln}} = 1$ est un réel strictement positif. Donc le quotient $\dfrac{M}{\ln(2)}$ aussi !

On appelle n alors le plus petit entier naturel tel que :

$$n \geq \frac{M}{\ln(2)} \Leftrightarrow \underbrace{n \times \ln(2) \geq M}_{\substack{\text{On multiplie par } \ln(2) \\ \text{qui est positif.}}} \Leftrightarrow \ln\left(2^n\right) \geq M$$

Comme ln est une fonction croissante, alors pour tout $x \geq 2^n$ nous avons :

$$\ln(x) \geq \ln\left(2^n\right) \geq M$$

<u>Conclusion :</u> nous venons d'établir que :

Pour tout réel positif M, il existe un moment $x_0 = 2^n$ à partir duquel $\ln(x) \geq M$.

C'est la définition d'une limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

❷ La limite de ln à droite de 0

Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, nous avons :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Quand x tend vers 0 par la droite, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$. Donc $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$

Ln contre les fonctions puissances

A l'infini, ln s'envole donc vers $+\infty$ ...comme toutes les fonctions puissances x^n (où n est un entier strictement positif). Mais laquelle de ces fonctions est la plus forte ?
Déjà, voyons comment se comporte le logarithme népérien vis-à-vis la fonction puissance la plus simple, la fonction identité $\mathrm{Id}(x) = x$.

Théorème : le logarithme népérien contre la fonction identité

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = 0$$

A l'infini comme en 0, la fonction ln est plus faible que la fonction identité.

La preuve de ce théorème

❶ La limite de ln(x)/x en $+\infty$

De prime abord, le quotient $\dfrac{\ln(x)}{x}$ est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Pour lever cette indétermination, étudions la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 2.\sqrt{x}$$

D'abord, calculons l'image de 1 par f.

$$f(1) = \ln(1) - 2.\sqrt{1} = 0 - 2 = -2$$

Ensuite les fonctions ln et racine étant dérivables sur $]0;+\infty[$, elles le sont de facto aussi sur $[1;+\infty[$. Donc leur différence f l'est également.

Pour tout $x \in [1;+\infty[$, vous pouvez écrire :

$$f'(x) = \left[\ln(x)\right]' - 2.\left[\sqrt{x}\right]'$$
$$= \frac{1}{x} - 2.\frac{1}{2.\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

Or si $x > 1$ alors $\underbrace{\sqrt{x} > \sqrt{1}}_{\substack{\text{La racine est strictement} \\ \text{croissante sur } [0;+\infty[}} = 1$

donc $1 - \sqrt{x} < 0$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de f est donc celui ci-contre.

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$1-\sqrt{x}$	$-$
x	$+$
$f'(x)$	$-$
f	-2 ↘ ?

La fonction f décroissant depuis -2, elle est donc négative sur l'intervalle sur $[1;+\infty[$.

Ainsi pour tout $x\in[1;+\infty[$, avons-nous :

$$f(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x)-2.\sqrt{x}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x)<2.\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\ln}{x}<\frac{2.\sqrt{x}}{x}=\frac{2.\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}}_{\substack{\text{On divise par } x\in[1;+\infty[\text{ qui est positif.}\\ \text{L'ordre est conservé}}}$$

De plus, sur l'intervalle $]1;+\infty[$, $\frac{\ln(x)}{x}$ est positif car c'est le quotient de deux quantités positives.

Nous venons d'établir que pour tout réel $x\in[1;+\infty[$:

$$0\leq\frac{\ln(x)}{x}\leq\frac{2}{\sqrt{x}}$$

Or lorsque x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x}$ s'en va vers $+\infty$ donc $\frac{2}{\sqrt{x}}$ tend vers $\frac{2}{+\infty}=0^+$.

Au voisinage de $+\infty$, le quotient $\frac{\ln(x)}{x}$ est coincé entre 0 et la quantité $\frac{2}{\sqrt{x}}$ qui y va.

<u>Conclusion :</u> en application du théorème des gendarmes, nous pouvons conclure :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

❷ La limite de x.ln(x) à droite de 0

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$x.\ln(x)=\frac{1}{1/x}\times\left[-\ln(1/x)\right]=-\frac{\ln(1/x)}{1/x}=-\frac{\ln(t)}{t}$$

Quand x tend vers 0 par la droite, $t=\frac{1}{x}$ tend vers $\frac{1}{0^+}=+\infty$.

Or d'après ce qui précède $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$.

Donc $\frac{\ln(1/x)}{1/x}$ tend vers 0.

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to0^+}x.\ln(x)=\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{\ln(1/x)}{1/x}=0$

Si la fonction ln ne fait déjà pas le poids face à la fonction $\mathrm{Id}(x)=x$, alors il y a peu de chance qu'elle inquiète les autres fonctions puissances ainsi que l'exponentielle. En effet :

- ***Ln face à la fonction puissance x^n où n est un entier supérieur ou égal à 2.***
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}\times\frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{+\infty}\times0=0\times0=0$
  - $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\times\ln(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{n-1}\times(x\times\ln(x))=0\times0=0$
- ***Ln face à la fonction exponentielle en $+\infty$***
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{+\infty}\times0=0\times0=0$

Une autre limite du logarithme népérien : ln(1+x)/x en 0

Quand x tend vers 0, la quantité $1+x$ tend vers 1. Donc $\underbrace{\ln(1+x) \text{ tend vers } \ln(1)=0}_{\text{Car ln est continue sur }]0;+\infty[}$.

Donc, en 0, le quotient $\frac{\ln(1+x)}{x}$ est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

Or, nous savons que la fonction ln est dérivable en 1 et y a pour nombre dérivé $\frac{1}{1}=1$.

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$1=\frac{1}{1}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}$$

Même si elle ne sert pas souvent, cette limite est à retenir :

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$

La réciproque de l'exponentielle

Les fonctions logarithme népérien et exponentielle présentent des propriétés algébriques et des limites symétriques. Ln est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et elle prend toutes ses valeurs $]0;+\infty[$.

Alors, comme qui dirait, on peut se demander s'il n'y aurait un lien entre les deux.

Pour le découvrir, étudions leur composée $\varphi(x)=\ln\circ\exp(x)=\ln(e^x)$.

$$\underset{\in\mathbb{R}}{x}\ \xrightarrow[\substack{\text{Définie}\\ \text{et dérivable sur } \mathbb{R}\\ u(x)=e^x \quad u'(x)=e^x}]{\text{Exponentielle}}\ \underset{\in]0;+\infty[}{e^x}\ \xrightarrow[\substack{\text{Définie}\\ \text{et dérivable sur }]0;+\infty[\\ v(t)=\ln(t) \quad v'(t)=1/t}]{\text{Logarithme népérien}}\ \varphi(x)=\ln(e^x)$$

Sans problème, cette fonction φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons sa dérivée.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$\varphi'(x)=\left(\ln\left(e^x\right)\right)'=\left(\ln(u)\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1$$

Donc la fonction φ est une primitive de la fonction 1. Par conséquent, φ est de la forme :

$$\text{Pour tout réel x,} \quad \varphi(x)=x+\text{Constante}$$

Pour connaître la valeur de cette constante, calculons l'image de 0 par φ de deux manières :

$$\varphi(0)=\ln\left(e^0\right)=\ln(1)=0 \qquad \varphi(0)=0+\text{Constante}=\text{Constante}$$

Nous en déduisons :

$$\text{Constante}=0$$

Et par conséquent, nous obtenons l'expression de φ. Pour tout réel x, nous avons :

$$\varphi(x)=\underbrace{\ln\left(e^x\right)=x}_{\text{Le logarithme népérien de l'exponentielle d'un nombre est égal à ce nombre.}}$$

Le truc au passage : L'image du nombre e par ln, elle est égale à 1 !
Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle. Par conséquent, il vient :

$$\ln(e)=\ln\left(e^1\right)=1$$

Maintenant, on peut se poser la question dans l'autre sens : est-ce que l'exponentielle du logarithme népérien d'un nombre vous redonne votre nombre ? Autrement formulé :

$$\underbrace{\text{Pour tout réel strictement positif x}}_{\text{Sinon pas de logarithme népérien...}}\text{, a-t-on :} \quad \exp\left(\ln(x)\right)=e^{\ln(x)}=x \ ?$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$ et prend toutes les valeurs de l'intervalle $]0;+\infty[$, alors il existe un (unique) réel t tel que $x=e^t$. Il vient :

$$e^{\ln(x)}=\exp\left(\ln(x)\right)=\exp\left(\underbrace{\ln\left(e^t\right)}_{\text{D'après ce qui a été établi...}}\right)=\exp(t)=e^t=x$$

Théorème : les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques
Les fonctions $\underbrace{\text{exponentielle}}_{\exp\,:\,\mathbb{R}\longrightarrow]0;+\infty[}$ et $\underbrace{\text{logarithme népérien}}_{\ln\,:\,]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}}$ sont des bijections sur leurs ensembles respectifs. Elles sont les réciproques l'une de l'autre. Nous avons :

$$\underbrace{\ln\left(e^x\right)=x}_{\substack{\text{Valable si}\\ \text{x est un réel quelconque.}}} \qquad \underbrace{e^{\ln(y)}=y}_{\substack{\text{Valable si}\\ \text{y est un réel strictement positif}}} \qquad \underbrace{y=e^x \iff x=\ln(y)}_{\substack{\text{Valable si x est un réel quelconque}\\ \text{et y un réel strictement positif.}}}$$

Ce qu'il faut retenir du logarithme népérien

1. Le logarithme népérien notée ln est défini et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

- ⌧ Sa dérivée est la fonction inverse : $\forall x\in]0;+\infty[,\quad \ln'(x)=\frac{1}{x}$
- ⌧ Les images de 1 et e par ln sont respectivement 0 et 1 : $\ln(1)=0 \quad \ln(e)=1$
- ⌧ Sa réciproque est la fonction exponentielle : $y=\ln(x) \iff x=e^y$

2. Le tableau de variation de ln est celui ci-contre

- L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentant ln.
- Ln est négative avant 1, soit sur l'intervalle $]0;1[$.
  Ln est nulle en 1 (et seulement en 1).
  Ln est positive après 1, soit sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
ln			$+\infty$
		↗	
	$-\infty$		

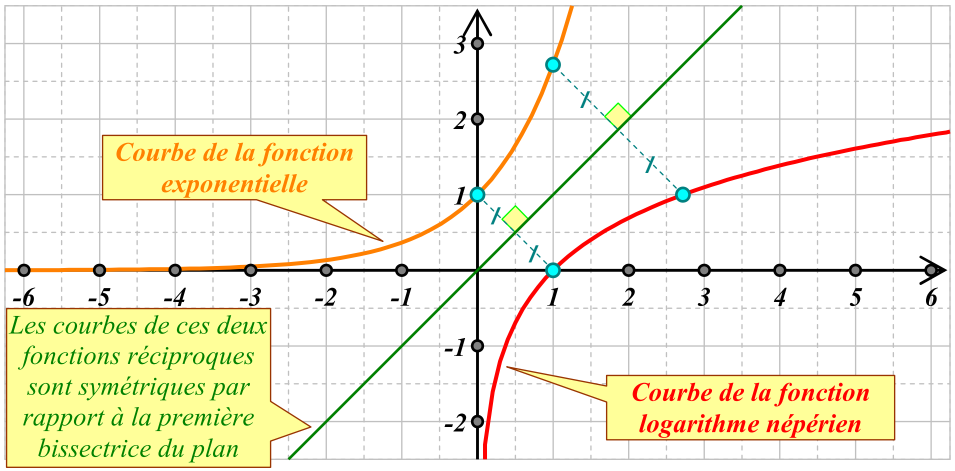
3. Le logarithme népérien vérifie les propriétés algébriques suivantes :
Pour tous réels strictement positifs a et b, pour tout entier relatif n, on a

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b) \qquad \ln\left(a^n\right)=n\times\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\times\ln(a)$$

4. En $+\infty$ comme en 0^+, ln est plus faible que toutes les fonctions puissances x^n.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=+\infty \qquad \lim_{x\to0^+}x^n\times\ln(x)=0$$



Une autre histoire des logarithmes

La longue histoire des logarithmes n'a pas débuté avec le logarithme népérien. Une fonction dans laquelle Monsieur John Napier ou Neper n'a rien d'ailleurs rien à voir.
A l'origine des logarithmes, il y a la volonté de construire un outil permettant de simplifier les calculs, en particulier les multiplications, les divisions et les extractions (calculs) de racines. Une des voies possibles alors consistait à trouver une fonction f qui convertisse les produits en sommes.
Cet outil ou cette fonction f devait aboutir à la rédaction d'une table de correspondance.
Pour effectuer le produit de deux réels strictement positifs x et y, on commencerait par lire sur la table de correspondance leurs images par la fonction f. Puis, on additionnerait $f(x)$ et $f(y)$. Enfin, par lecture inverse, on déterminerait le réel z dont l'image par f est égale à cette somme. Ce réel z correspondrait au produit $x \times y$.
Cette fonction et la table de correspondance qui en découlerait, devaient permettre d'effectuer plus aisément des calculs sur des grands nombres qui jusque là pouvaient prendre des mois, notamment en astronomie. L'astronomie était alors une science en plein développement qui était vitale pour la navigation des grands navires européens qui s'élançaient à la conquête du monde, de ses richesses et de ses océans.
C'est à la quête d'une telle fonction f que nous allons consacrer ce paragraphe.

Notre problème : les fonctions qui transforment les produits en sommes
Existe-il une (ou des) fonction f définie sur $]0;+\infty[$ vérifiant la propriété :

Pour tous réels strictement positifs x et y, $\underbrace{f(x\times y)=f(x)+f(y)}_{\text{L'image du produit est la somme des images}}$

Petite précision : à l'époque où les logarithmes virent le jour, c'est-à-dire au début du dix-septième siècle, la notion de fonction était encore très vague...

En ce qui nous concerne, nous connaissons déjà l'une de ces fonctions f. Il s'agit de ln, le logarithme népérien. Mais en existe-t-il d'autres et si oui, quelles formes ont-elles ?
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et répondant à notre problème. Elle vérifie la propriété : pour tous réels strictement positifs x et y, $f(x\times y)=f(x)+f(y)$.
D'abord, regardons si cette fonction f a-t-elle les mêmes propriétés algébriques que ln.

Les propriétés algébriques d'une telle fonction f

1. ***L'image de 1 par f est égale à 0***
   En effet, nous avons : $\cancel{f(1)} = \underbrace{f(1\times 1)=\cancel{f(1)}+f(1)}_{\text{L'image d'un produit...}} \Leftrightarrow f(1)=0$

2. ***L'image de l'inverse par f est égale à l'opposé de l'image par f***
   En effet, pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :
   $$0=f(1)=f\left(x\times\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\quad\text{d'où}\quad f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

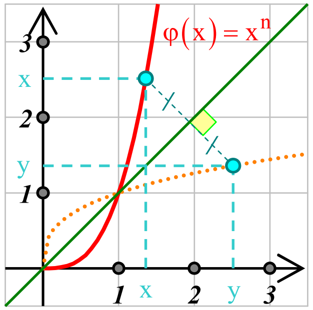
3. ***L'image d'un quotient par f est égale au quotient des images par f***
   Pour tous réels strictement positifs x et y, nous avons :
   $$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\times\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)+\left[-f(y)\right]=f(x)-f(y)$$

4. ***L'image d'une puissance par f est égale au produit de l'exposant par l'image***
   Soit a un réel strictement positif. Pour établir cette propriété, nous allons procéder en deux étapes...comme pour ln.
   D'abord, si n est un entier positif, alors a^n est le produit de n facteurs a. D'où :
   $$f\left(a^n\right)=\overbrace{f(\underbrace{a\times\ldots\times a}_{\text{n facteurs}})=\underbrace{f(a)+\ldots+f(a)}_{\text{n termes}}}^{\text{L'image du produit est la somme des images}}=n\times f(a)$$
   Ensuite, si n est un entier négatif, alors son opposé $p=-n$ est positif. Donc l'étape précédente est applicable à p. Il vient :
   $$f\left(a^n\right)=f\left(a^{-p}\right)=f\left(\frac{1}{a^p}\right)\underbrace{=-}_{\text{D'après } 2.}f\left(a^p\right)=-\left[p\times f(a)\right]=(-p)\times f(a)=n\times f(a)$$

5. ***L'image par f de la racine est égale à la moitié de l'image par f***
   Tout réel strictement positif a est le carré de sa racine. Nous pouvons écrire :
   $$f(a)=f\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right)=2\times f\left(\sqrt{a}\right)\quad\text{d'où}\quad f\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\times f(a)$$

Ainsi, si une fonction f définie sur l'ensemble $]0;+\infty[$ transforme les produits en sommes, alors elle possède les mêmes propriétés algébriques que ln. Et même, la propriété ***4*** peut être étendue à d'autres puissances.

De la racine nième d'un réel positif...



Soit n un entier strictement positif.
La racine nième d'un réel strictement positif se définit de la même manière que sa racine carrée.
La fonction puissance entière $\varphi(x)=x^n$ est dérivable donc continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
De plus, comme φ est strictement croissante sur cet l'intervalle passant de 0 à $+\infty$, alors φ est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $\varphi([0;+\infty[)=[0;+\infty[$.

Tout réel $y \in [0;+\infty[$ a un unique antécédent x par φ.

Tout réel positif y est la puissance nième d'un unique réel positif x.
Dans l'autre sens, on dit que cet unique réel positif x est la racine nième du réel y.

Définition de la racine nième d'un réel strictement positif
Soit n un entier strictement positif.
La racine nième du réel strictement positif a est le réel strictement positif b dont la puissance nième est égal à a.

La racine nième de a est notée $\sqrt[n]{a}$ et on dit que c'est la puissance $\frac{1}{n}$ de a. Ainsi :

$$\underbrace{b = \sqrt[n]{a} = a^{1/n} \quad \Leftrightarrow \quad a = b^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{1/n}\right)^n}_{\text{a et b sont des réels strictement positifs}}$$

La racinée carrée d'un réel positif est sa racine seconde. C'est aussi sa puissance 1/2.
La racine nième possède les mêmes propriétés que sa consoeur carrée. Enumérons les !
Dans ce qui suit, a et a' sont deux réels strictement positifs. n est un entier positif.

Si b et b' sont les racines nièmes respectives de a et a', alors $a = b^n$ et $a' = b'^n$.

- ***La racine nième de 1 est 1...et celle de 0 est 0***

  En effet, comme $0^n = 0$ et $1^n = 1$, alors $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.

- ***La racine nième d'un produit***

  Comme $(b \times b')^n = b^n \times b'^n = a \times a'$, alors $b \times b'$ est la racine nième de $a \times a'$.

  La racine nième du produit est le produit des racines nièmes : $\sqrt[n]{a \times a'} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a'}$

- ***La racine nième d'un quotient***

  Vu que $\left(\frac{b}{b'}\right)^n = \frac{a^n}{a'^n} = \left(\frac{a}{a'}\right)^n$ alors $\frac{b}{b'}$ est la racine nième de $\frac{a}{a'}$.

  La racine nième d'un quotient est le quotient des racines nièmes : $\sqrt[n]{\frac{a}{a'}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a'}}$.

  La racine nième de l'inverse est l'inverse de la racine nième : $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

- ***La racine nième d'une puissance entière***
  Soit p un entier relatif.

  Comme $\left(b^p\right)^n = b^{p \times n} = \left(b^n\right)^p = a^p$, alors b^p est la racine nième de a^p.

  La racine nième d'une puissance est la puissance de la racine : $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$.

- ***La racine p-ième de la racine nième.***

  Si on note c la racine p-ième de $b = \sqrt[n]{a}$, alors nous avons l'égalité $c^p = b$.

  Donc, comme $c^{p \times n} = \left(c^p\right)^n = b^n = a$ alors c est la racine $n \times p$-ième de a.

  La racine p-ième de la racine nième est la racine $n \times p$-ième : $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \times p]{a}$

De plus, les propriétés algébriques sur la racine carrée des fonctions exponentielle, logarithme népérien et ***f*** se retrouvent aussi avec cette racine nième !

- ***La racine nième et la fonction exponentielle***
  Pour tout réel a, nous avons :

  $$e^a = \exp\left(n \times \frac{a}{n}\right) = \left(\exp\left(\frac{a}{n}\right)\right)^n \quad \text{d'où} \quad \sqrt[n]{e^a} = e^{a/n}$$

- ***La racine nième et la fonction logarithme népérien***
  Pour tout réel strictement positif a, nous pouvons écrire :

  $$\ln(a) = \ln\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right) = n \times \ln\left(\sqrt[n]{a}\right) \quad \text{d'où} \quad \ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n} \times \ln(a)$$

- ***La racine nième et notre fonction f qui transforme les produits en sommes***
  Pour tout réel strictement positif a, il vient comme pour le logarithme népérien :

  $$\boldsymbol{f}(a) = \boldsymbol{f}\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right) = n \times \boldsymbol{f}\left(\sqrt[n]{a}\right) \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{f}\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n} \times \boldsymbol{f}(a)$$

...à sa puissance rationnelle

Maintenant que nous avons défini ce qu'était la puissance $\frac{1}{n}$ d'un nombre strictement positif, nous allons pouvoir énoncer ce qu'est sa puissance rationnelle.

Définition de la puissance rationnelle d'un réel strictement positif
p est un entier relatif quelconque et q un entier strictement positif.
a est un réel strictement positif.

La puissance $\frac{p}{q}$ du réel a est la racine q-ième de la puissance p-ième de a. Autrement dit :

$$a^{p/q} = \underbrace{\sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p}_{\text{Car nous avons établi que la racine q-ième laissait passer la puissance entière p.}}$$

Une question se pose : cette définition a-t-elle un sens ?

Une même fraction r peut être écrite avec des couples d'entiers $(p;q)$ différents.

Si on prend deux fractions (de deux entiers) égales $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$, aboutit-on au même résultat avec notre définition ?

Si les fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ sont égales, alors les quatre entiers vérifient $p\times q'=p'\times q$.

Pour tout réel strictement positif a, nous pouvons alors écrire que :

$$\left(a^{p'/q'}\right)^q=\left(\left(\sqrt[q']{a}\right)^{p'}\right)^q=\left(\sqrt[q']{a}\right)^{p'\times q}=\left(\sqrt[q']{a}\right)^{p\times q'}=\left(\left(\sqrt[q']{a}\right)^{q'}\right)^p=a^p$$

Comme sa puissance q-ième est égale à a^p, alors $a^{p'/q'}$ est la racine q-ième de a^p. D'où :

$$a^{p'/q'}=\sqrt[q]{a^p}=a^{p/q}$$

<u>Conclusion :</u> deux fractions égales conduisant à la même puissance. Notre définition a un sens.

Les propriétés de la puissance rationnelle

Les propriétés opératoires de la puissance entière s'étendent à la puissance rationnelle.
Dans ce qui suit, les nombres r et r' sont deux rationnels que nous écrirons avec un même dénominateur positif q. Nous noterons p et p' les numérateurs correspondants à q. Ainsi :

$$r=\frac{p}{q} \qquad\qquad r'=\frac{p'}{q}$$

Précision : q est un entier positif. p et p' sont des entiers relatifs.

- ***Le produit de deux puissances d'un même réel strictement positif a.***
  Pour tout réel strictement positif a, nous pouvons écrire :
  $$a^r\times a^{r'}=\sqrt[q]{a^p}\times\sqrt[q]{a^{p'}}=\sqrt[q]{a^p\times a^{p'}}=\sqrt[q]{a^{p+p'}}=a^{\frac{p+p'}{q}}=a^{r+r'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}}$$
- ***Le quotient de deux puissances d'un même réel strictement positif a.***
  Pour tout réel strictement positif a, nous pouvons écrire :
  $$\frac{a^r}{a^{r'}}=\frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{a^{p'}}}=\sqrt[q]{\frac{a^p}{a^{p'}}}=\sqrt[q]{a^{p-p'}}=a^{\frac{p-p'}{q}}=a^{r-r'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}}$$
- ***Le produit de deux puissances de même exposant.***
  Pour tous réels strictement positifs a et b, nous avons :
  $$a^r\times b^r=\sqrt[q]{a^p}\times\sqrt[q]{b^p}=\sqrt[q]{a^p\times b^p}=\sqrt[q]{(a\times b)^p}=(a\times b)^r \quad \text{d'où} \quad \boxed{a^r\times b^r=(a\times b)^r}$$
- ***Le quotient de deux puissances de même exposant.***
  Pour tous réels strictement positifs a et b, nous pouvons écrire :
  $$\frac{a^r}{b^r}=\frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}}=\sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}}=\sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p}=\left(\frac{a}{b}\right)^r \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r}$$
- ***La puissance de la puissance***
  Pour tout réel strictement positif a, nous avons :
  $$\left(a^r\right)^{r'}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{p'}}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[q]{a^{p\times p'}}\right)}=\sqrt[q\times q]{a^{p\times p'}}=a^{\frac{p\times p'}{q\times q}}=a^{r\times r'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\left(a^r\right)^{r'}=a^{r\times r'}}$$

De plus, notre puissance rationnelle présente les mêmes propriétés avec les fonctions exponentielle, ln et f que sa consoeur entière. Voyons comment !
Dans ce qui vient, p est un entier relatif et q un entier strictement positif.

- ***La puissance rationnelle et la fonction exponentielle***
  Pour tout réel a, nous pouvons écrire :
  $$\left(e^a\right)^{p/q}=\underbrace{\sqrt[q]{\left(e^a\right)^p}}_{\text{Par définition...}}=\underbrace{\sqrt[q]{e^{p\times a}}}_{\text{Exponentielle d'une puissance entière p.}}=\underbrace{e^{\frac{p\times a}{q}}}_{\text{Exponentielle d'une racine q-ième}}=e^{\frac{p}{q}\times a}$$
  La puissance de l'exponentielle est égale à l'exponentielle du produit par l'exposant.
- ***La puissance rationnelle et la fonction logarithme népérien***
  Pour tout réel strictement positif a, nous avons :
  $$\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right)=\underbrace{\ln\left(\sqrt[q]{a^p}\right)}_{\text{Définition...}}=\underbrace{\frac{1}{q}\times\ln\left(a^p\right)}_{\text{Logarithme d'une racine q-ième}}=\frac{1}{q}\times\underbrace{p\times\ln(a)}_{\text{Logarithme d'une puissance p-ième}}=\frac{p}{q}\times\ln(a)$$
  Le logarithme d'une puissance est égal au produit de l'exposant et du logarithme.
- ***La puissance rationnelle et notre fonction f***
  $$f\left(a^{\frac{p}{q}}\right)=\underbrace{f\left(\sqrt[q]{a^p}\right)}_{\text{Définition...}}=\underbrace{\frac{1}{q}\times f\left(a^p\right)}_{\text{Image par f d'une racine q-ième}}=\frac{1}{q}\times\underbrace{p\times f(a)}_{\text{Image par f d'une puissance p-ième}}=\frac{p}{q}\times f(a)$$
  L'image par ***f*** d'une puissance est égale au produit de l'exposant par la fonction ***f***.

C'est cette dernière propriété qui va nous donner la clé de notre problème.

Le visage de notre fonction f : une première tentative

A quoi notre fonction f qui est définie sur $]0;+\infty[$ et qui vérifie $\underbrace{\boldsymbol{f}(x\times y)=\boldsymbol{f}(x)+\boldsymbol{f}(y)}_{\text{Pour tous réels x et y de }]0;+\infty[}$ peut-elle bien ressembler ?
Pour le savoir, nous allons nous intéresser à la fonction φ définie pour tout réel t par :

$$\varphi(t)=\boldsymbol{f}\circ\exp(t)=\boldsymbol{f}\left(e^t\right)$$

Soit $r\in\mathbb{Q}$ un rationnel quelconque. Ce rationnel peut s'écrire sous la forme du quotient :

$$r=\frac{p}{q}$$

où p est un entier relatif et q un entier strictement positif.
Examinons l'image de r par notre fonction φ.

$$\varphi(r)=\boldsymbol{f}\left(e^r\right)=\boldsymbol{f}\left(\exp\left(\frac{p}{q}\times 1\right)\right)=\underbrace{\boldsymbol{f}\left(\left(\exp(1)\right)^{p/q}\right)}_{\text{L'exponentielle et la puissance rationnelle.}}=\boldsymbol{f}\left(\left(e\right)^{p/q}\right)=\underbrace{\frac{p}{q}\times\boldsymbol{f}(e)}_{\text{f et la puissance rationnelle}}=r\times\boldsymbol{f}(e)$$

La quantité $\boldsymbol{f}(e)$ étant constante, cela signifie que <u>restreinte à $\mathbb{Q}$</u>, φ est une fonction linéaire.

$$\boxed{\text{Pour tout } r\in\mathbb{Q}\text{, nous avons : }\ \varphi(r)=\boldsymbol{f}(e)\times r}$$

Mais cette égalité n'est vraie que sur l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$. L'idéal serait de pouvoir l'étendre à $\mathbb{R}$ mais le peut-on ?
La réponse est oui mais pour cela nous allons devoir rajouter une condition sur ***f***.

Le visage de notre fonction f lorsqu'elle est continue.

L'idée première d'une fonction continue ϕ sur un intervalle est celle d'une courbe sans trou.
Rigoureusement, cette notion de continuité peut être définie de deux manières :

- Dire qu'une fonction ϕ est continue en a <u>signifie que</u> $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\phi(x)=\phi(a)$
- Dire que la fonction ϕ est continue en a <u>signifie que</u> si une suite (u_n) converge vers a, alors son image $(\phi(u_n))$ converge elle vers $\phi(a)$.

C'est cette seconde caractérisation que nous allons utiliser dans ce qui vient.

Supposons qu'en plus de la propriété $\underbrace{\boldsymbol{f}(x\times y)=\boldsymbol{f}(x)+\boldsymbol{f}(y)}_{\text{Pour tous réels x et y de }]0;+\infty[}$, notre fonction ***f*** soit continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

La précédente fonction φ est alors la composée suivante :

$$\underset{\in\mathbb{R}}{t}\xrightarrow[\text{Définie, dérivable donc continue sur }\mathbb{R}]{\text{Exponentielle}}\underset{\in]0;+\infty[}{e^t}\xrightarrow[\text{Définie et continue sur }]0;+\infty[]{\boldsymbol{f}}\varphi(t)=\boldsymbol{f}\left(e^t\right)$$

Etant la composée de deux fonctions continues sur leurs ensembles de définition respectifs, φ est continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

De plus, l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est <u>dense</u> dans $\mathbb{R}$. Comprenez par là que quelque soit le réel a que l'on choisisse, on peut toujours trouver un rationnel r qui soit aussi proche de a que l'on veut.
Une des conséquences de cette densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est que tout réel a est la limite d'une (au moins) suite de rationnels (r_n).
Comme les r_n sont tous des rationnels alors, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$\varphi(r_n)=\boldsymbol{f}(e)\times r_n$$

Quand n tend vers $+\infty$, la suite (r_n) tend vers a. Donc la suite $\varphi(r_n)=\boldsymbol{f}(e)\times r_n$ tend vers $\boldsymbol{f}(e)\times a$.
Or la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en a. Donc, si la suite (r_n) tend vers le réel a, alors la suite $\varphi(r_n)$ tend vers $\varphi(a)$. Question de continuité !
On en déduit alors :

$$\underbrace{\varphi(a)=\lim_{n\to+\infty}\varphi(r_n)=\boldsymbol{f}(e)\times a}_{\substack{\text{Valable pour tout réel a.}\\ \text{La suite }(r_n)\text{ dépend de ce réel a.}}}$$

Ainsi, si ***f*** est continue, φ est-elle une fonction linéaire sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel t, nous avons :

$$\varphi(t)=\boldsymbol{f}(e)\times t$$

Quelles sont alors les conséquences pour notre fonction ***f*** qui est continue sur $]0;+\infty[$?
Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.
La fonction exponentielle étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$, il existe un unique réel t tel que :

$$\underbrace{x=e^t\ \Leftrightarrow\ t=\ln(x)}_{\text{Ln et exp sont les réciproques l'une de l'autre.}}$$

Il vient alors :

$$\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{f}\left(e^t\right)=\varphi(t)=\boldsymbol{f}(e)\times t=\boldsymbol{f}(e)\times\ln(x)$$

Conclusion : le visage de la fonction *f* lorsqu'elle est continue

Toutes les fonctions *f* qui sont continues sur $]0;+\infty[$ et qui vérifient la propriété

$$\underbrace{f(x\times y)=f(x)+f(y)}_{\text{Pour tous réels x et y de }]0;+\infty[}$$

sont des multiples de la fonction logarithme népérien. Elles sont de la forme :

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $\underbrace{f(x)=f(e)\times\ln(x)}_{\text{C'est l'image de e qui détermine } f}$

Lorsque $f(e)$ est nul, la fonction *f* est la fonction nulle.

Lorsque $f(e)$ est non nul, la fonction *f* un multiple du logarithme népérien. C'est ce que l'on appelle un logarithmes de base a. Nous allons en reparler dans quelques instants.

Et que se passe-t-il lorsque la fonction *f* n'est pas continue sur $]0;+\infty[$?

C'est une bonne question. D'aucuns affirment que l'axiome du choix permet de dire qu'il existe des logarithmes non continus. Sans doute ? Mais je n'en ai jamais croisé. Peut-être sont-ils de ces évidences qu'on ne voit jamais ?

Les logarithmes de base a

Pour conclure ce paragraphe, nous allons définir ce qu'est un logarithme de base a.

Définition du logarithme de base a

a est un réel strictement positif différent de 1.

Le logarithme de base a est la fonction notée $\log_a$ et définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

Pour tout réel strictement positif x, $\log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

On impose que a soit distinct de 1 pour éviter d'avoir à diviser par $\ln(1)=0$.

Quelques remarques à propos de ces logarithmes de base a :

- ***Dérivabilité et sens de variation***

  Du fait de sa définition, la fonction $\log_a$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

  Pour tout réel strictement positif x, nous avons : $(\log_a)'(x)=\dfrac{1}{\ln(a)}\times\dfrac{1}{x}$

  Par conséquent :

  ✈ Si $a\in]0;1[$ <u>alors</u> $\ln(a)$ est négatif <u>donc</u> $\log_a$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

  ✈ Si $a\in]0;+\infty[$ <u>alors</u> $\ln(a)$ est positif <u>donc</u> $\log_a$ est croissante sur $]0;+\infty[$.

- ***Les limites du logarithme de base a***

  Le logarithme de base a hérite ses limites de celles du logarithme népérien.

  Celles-ci sont modulées par le signe de $\ln(a)$ donc par la position de a vis-à-vis de 1.

  ✈ Si $a<1$ <u>alors</u> $\lim\limits_{x\to0^+}\log_a(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a(x)=-\infty$.

  ✈ Si $a>1$ <u>alors</u> $\lim\limits_{x\to0^+}\log_a(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a(x)=+\infty$.

- ***Les propriétés du logarithme de base a***

  Le logarithme de base a hérite des propriétés algébriques du logarithme népérien.

  Pour tous réels strictement positifs x et y, nous avons :

  $$\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)\qquad \log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$$

  $$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)\qquad \underbrace{\forall r\in\mathbb{Q},\text{ on a : }\log_a\left(x^r\right)=r\times\log_a(x)}_{\text{Lorsque r=1/2, on retrouve la propriété de la racine carrée}}$$

- ***Le logarithme de base a est le seul logarithme par lequel l'image a est égale à 1.***

  Pour tout réel $a\in]0;1[\cup]1;+\infty[$, on a : $\log_a(a)=\dfrac{\ln(a)}{\ln(a)}=1$

- ***Le logarithme de base a d'une puissance rationnelle de a est égal à l'exposant.***

  Pour tout rationnel $r\in\mathbb{Q}$, nous avons : $\log_a\left(a^r\right)=r\times\log_a(a)=r\times1=r$

  La fonction logarithme de base a est la réciproque de la fonction exponentielle de base a.

- ***Le logarithme népérien***

  Le logarithme népérien est le logarithme de base e.

  En effet, pour tout réel $x\in]0;+\infty[$:

  $$\log_e(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(e)}=\frac{\ln(x)}{1}=\ln(x)$$

  Par le passé, le logarithme népérien était aussi appelé <u>logarithme naturel</u> ou encore hyperbolique. Ceci car la fonction ln qui est une primitive de $\dfrac{1}{x}$, permet de calculer l'aire sous l'hyperbole qui représente la fonction inverse.

- ***Le logarithme décimal***

  Le logarithme décimal est le logarithme de base 10. Cette fonction est notée log.

  Historiquement, c'est le premier logarithme qui fut construit par l'écossais John Napier (1550-1617) et l'anglais Henry Briggs (1556-1630).