Un mot d'introduction :

Beaucoup vous le diront : la théorie c'est bien mais rien ne vaut la pratique c'est-à-dire l'action ! Nous avons déjà été amenés à voir les suites dans la pratique. Cela concernait ce qui peut se faire en Première. Voici la suite de l'aventure des suites avec l'exercice dont l'énoncé vous ait donné ci-contre.

Cet exercice est prévu pour être traité en une petite heure. Il était à l'origine destiné aux candidats de Baccalauréat ES/Spécialité Mathématiques. Cela dit, il peut aussi convenir aux autres !

Le corrigé pédagogiquement incorrect de cet exercice se trouve en deuxième page et suivantes. Pour accéder à une question en particulier, cliquer sur celle-ci dans l'énoncé ci-contre !

Si par malheur, vous aviez oublié des choses ou des notions, pensez à consulter nos pages de cours car elles sont là pour cela...

- **Premières suites.**
  Les bases et l'essentiel de ce qu'il faut savoir sur les suites.
- **Convergences.**
  Les suites ont des limites. Lorsqu'elles sont finies, on parle de convergence...

Bon courage !

Avertissement : *Ce document a été conçu pour être imprimé ou pour être consulté sur un écran. A cet effet, des liens hypertextes permettent de naviguer d'une question à son corrigé.*
Le présent exercice est une libre adaptation d'un exercice qui aurait pu être donné lors d'une épreuve de Baccalauréat ES/Spécialité Mathématiques. En aucun cas, il ne serait tenir lieu de corrigé officiel.
Ce document est fourni tel quel sans aucune garantie. Si vous rencontriez une erreur, merci de nous en faire part...

Suites en action acte 2

L'énoncé

Anastase, jardinier amateur, avait une magnifique pelouse de gazon autour de sa maison. Il habite à la campagne et tous les ans 20% du gazon est détruit pendant l'été et remplacé par du chiendent (c'est-à-dire quelques brins d'herbe sur une terre asséchée qui ne saurait prétendre au titre de gazon).
Chaque année, à l'automne, il arrache 50 mètres carrés de chiendent et le remplace par du gazon.
La suite (u_n) est définie par :

- u_0 qui représente la surface initiale de la pelouse.
- u_n qui est la surface de gazon sans chiendent restant au bout de n années.

Dans tout l'exercice, les surfaces sont exprimées en mètres carrés.

a) Pourquoi peut-on écrire que pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 50$?

b) On sait que $u_2 = 1370$.
Démontrer que la surface initiale de gazon u_0 est égale à 2000 mètres carrés.

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.

c) Démontrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = 0{,}8 \times v_n$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 1750 \times 0{,}8^n + 250$.

d) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

e) Déterminer le nombre d'années pendant lesquelles Anastase garde plus du quart de sa pelouse sans chiendent.

Le corrigé pédagogiquement incorrect :

a) Pourquoi peut-on écrire que pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 50$?

u_n représente la surface de gazon existant à l'issue de la nième année. L'année suivante, c'est-à-dire l'année $n+1$, elle est amputée de 20% qui deviennent du chiendent.
Autrement dit, il reste 80% du gazon originel. Prendre 80% d'une quantité revient à la multiplier par 0,8.
Enfin à ce qu'il reste c'est-à-dire $0{,}8 \times u_n$, Anastase replante 50 mètres carrés. A l'issue de la n+1 ième année, il y a donc $\underbrace{0{,}8 \times u_n + 50}_{u_{n+1}}$ mètres carré de gazon !

**b) On sait que $u_2 = 1370$.
Démontrer que la surface initiale de gazon u_0 est égale à 2000 mètres carrés.**

Comme certains remontent le temps pour savoir ce qui s'est passé, nous allons remonter la suite (u_n) de u_2 à u_0 afin de savoir d'où nous sommes partis.
La formule de récurrence définissant la suite (u_n) appliquée à $n = 1$ nous permet d'écrire que :

$$\underbrace{1370}_{u_2} = 0{,}8 \times u_1 + 50 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0{,}8 \times u_1 = 1320 \quad \text{donc} \quad u_1 = 1650$$

Nous allons obtenir u_0 de la même façon en appliquant cette fois la formule de récurrence au rang $n = 0$. Il vient donc que :

$$\underbrace{1650}_{u_1} = 0{,}8 \times u_0 + 50 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0{,}8 \times u_0 = 1600 \quad \text{donc} \quad u_0 = 2000$$

Conclusion : le terme initial u_0 est donc bien égal à 2000. Le brave Anastase avait donc bien 2000 mètres carrés de gazon au début !

A propos d'une méthode douteuse !
Pour répondre à cette question, certains auront peut-être l'idée de partir de u_0 pour arriver à u_2. Ils partent de 2000 pour aboutir à 1370 via la formule de récurrence de la suite. Ils pensent alors avoir répondu à la question !
Que nenni ! En effet, la seule chose qu'ils peuvent alors affirmer est que si le terme initial u_0 vaut 2000 alors le second terme u_2 vaut 1370.
Mais réciproquement, si u_2 vaut 1370 le terme initial vaut-il nécessairement 2000 ?
Car après tout, peut-être y a-t-il d'autres suites qui permettent d'aboutir à $u_2 = 1370$?

**c) Démontrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = 0{,}8 \times v_n$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 1750 \times 0{,}8^n + 250$.**

Pour connaître l'expression du terme u_n en fonction de n, on introduit une suite auxiliaire. Ici la suite (v_n). Comme nous allons le voir, cette suite va présenter une propriété intéressante qui nous permettra de conclure sur (u_n)

Pour démontrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = 0{,}8 \times v_n$, nous devons exprimer ces deux termes vis-à-vis d'une même chose. Clairement, il apparaît qu'il s'agit de u_n. En effet :

- D'une part, nous savons que $v_n = u_n - 250$.
  Donc $0{,}8 \times v_n = 0{,}8 \times u_n - 200$
- D'autre part, nous avons que :
  $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = \underbrace{0{,}8 \times u_n + 50}_{\substack{\textit{Formule de} \\ \textit{récurrence}}} - 250 = 0{,}8 \times u_n - 200 = 0{,}8 \times v_n$

Donc pour tout entier naturel n, nous avons bien que $v_{n+1} = 0{,}8 \times v_n$.

Ainsi on passe donc d'un terme de la suite (v_n) au suivant en multipliant à chaque fois par la même chose.
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 250$. Par conséquent, nous connaissons son expression :

$$\text{Pour tout entier naturel n,} \quad v_n = v_0 \times q^n = 1750 \times 0{,}8^n$$

Par suite, l'expression du terme u_n en fonction de n est donc donné par :

$$\text{Pour tout entier naturel n,} \quad u_n = v_n + 250 = 1750 \times 0{,}8^n + 250$$

**d) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.**

Pour étudier le sens de variation de (u_n), il y a deux chemins possibles :

- Le premier consiste à s'intéresser $f(x) = 1750 \times 0{,}8^x + 250$ et à étudier ses variations. C'est presque une fonction exponentielle de base 0,8.
  Cette fonction est définie sur ℝ tout entier !
  Sa dérivée est $f'(x) = 1750 \times \ln(0{,}8) \times 0{,}8^x$.

Comme $\ln(0{,}8)$ est négatif et qu'une exponentielle (même de base 0,8) est toujours positive, la dérivée de f est donc tout le temps négative donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty;+\infty[$ donc en particulier sur $[0;+\infty[$.
Par suite, la suite $u_n = f(n)$ est donc aussi décroissante.

- Le second chemin passe par le signe de la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$. Justement, intéressons-nous à cette différence !
  Pour tout entier naturel n, on peut écrire que :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1750 \times 0{,}8^{n+1} + 250\right) - \left(1750 \times 0{,}8^n + 250\right)$$
$$= 1750 \times \underbrace{0{,}8 \times 0{,}8^n}_{n+1 \text{ facteurs}} - 1750 \times 0{,}8^n$$
$$= 1750 \times 0{,}8^n \times [0{,}8 - 1] = \underbrace{-0{,}2 \times 1750 \times 0{,}8^n}_{\text{Toujours négatif...}}$$

Donc pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est toujours négative donc u_{n+1} est toujours plus petit que u_n. La suite (u_n) est donc décroissante.

Note : pour qui ne connaît pas les fonctions exponentielles de base a, il est bien évident que la seconde méthode est la plus indiquée... Enfin, ça c'est vous qui voyez !

Pour déterminer la limite, point besoin de repasser par les exponentielles de base a ! En effet, les choses s'enchaînent toutes seules !

Lorsque n tend vers $+\infty$, la suite géométrique $0{,}8^n$ tend vers 0.
donc $1750 \times 0{,}8^n$ tend aussi vers 0
donc u_n tend vers 250.

Conclusion : la limite de la suite (u_n) est égale à 250.

e) Déterminer le nombre d'années pendant lesquelles Anastase garde plus du quart de sa pelouse sans chiendent.

Depuis la question b, nous savons que la surface initiale de gazon est de 2000 mètres carrés. Il s'agit de savoir quand est-ce que cette surface u_n demeure supérieure au quart de celle-ci. Pour cela, nous devons donc résoudre l'inéquation :

$$\underbrace{u_n}_{\text{La surface de gazon}} \geq \underbrace{500}_{\text{Le quart...}}$$

Au boulot ! Nous pouvons écrire que :

$$u_n \geq 500$$
$$1750 \times 0{,}8^n + 250 \geq 500$$
$$1750 \times 0{,}8^n \geq 250$$
$$0{,}8^n \geq \frac{1}{7}$$

Pour faire sauter l'obstacle de la puissance, il suffit de passer cette inégalité au logarithme népérien qui est une fonction croissante et bijective. Il vient donc que :

$$\ln\left(0{,}8^n\right) \geq \ln\left(\frac{1}{7}\right)$$
$$n \times \ln(0{,}8) \geq -\ln(7)$$
$$n \leq \frac{-\ln(7)}{\ln(0{,}8)} \approx 8{,}72...$$

L'ordre change car ln(0,8) est négatif

Conclusion : le brave Anastase garde donc plus du quart de sa pelouse durant les huit premières années. Et après, il n'a qu'à dire qu'il a planté du chiendent !