Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique un centimètre.

1. Restitution organisée des connaissances

On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

- **Propriété 1 :** toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme :
$$z' = a\times\overline{z}+b$$
où $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$.
- **Propriété 2 :** soit C un point d'affixe c. Pour tout point D distinct de C et d'affixe d et, pour tout point E distinct de C et d'affixe e, on a :
$$\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}\right)=\arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right) \text{ modulo } 2\pi$$

Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

Soit s une similitude dont une expression complexe est de la forme :
$$z' = a\times\overline{z}+b$$

On évite le qualificatif "indirecte"

Soient K, L, N et P quatre points du plan complexes d'affixes respectives k, l, n et p.
On suppose que les points K et L sont distincts.
On appelle alors K', L', N' et P' leurs images par la similitude s.
Leurs affixes respectives k', l', n' et p' vérifient :

$$K' = s(K) \Leftrightarrow k' = a\times\overline{k}+b \qquad N' = s(N) \Leftrightarrow n' = a\times\overline{n}+b$$
$$L' = s(L) \Leftrightarrow l' = a\times\overline{l}+b \qquad P' = s(P) \Leftrightarrow p' = a\times\overline{p}+b$$

Intéressons-nous au quotient complexe :
$$\frac{p'-n'}{l'-k'}=\frac{\left(a\times\overline{p}+\cancel{b}\right)-\left(a\times\overline{n}+\cancel{b}\right)}{\left(a\times\overline{l}+\cancel{b}\right)-\left(a\times\overline{k}+\cancel{b}\right)}=\frac{\cancel{a}\times\left(\overline{p}-\overline{n}\right)}{\cancel{a}\times\left(\overline{l}-\overline{k}\right)}=\frac{\overline{p-n}}{\overline{l-k}}=\overline{\left(\frac{p-n}{l-k}\right)}$$

La différence des conjugués est égale au conjugué de la différence. Le quotient des conjugués est égal au conjugué du quotient.

Il vient alors :
$$\left(\overrightarrow{K'L'},\overrightarrow{N'P'}\right)=\arg\left(\frac{p'-n'}{l'-k'}\right)=\underbrace{\arg\left(\overline{\left(\frac{p-n}{l-k}\right)}\right)=-\arg\left(\frac{p-n}{l-k}\right)}_{\text{L'argument du conjugué est égal à l'opposé de l'argument}}=-\left(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{NP}\right) \text{ modulo } 2\pi$$

Donc la similitude s change l'orientation des angles.

Cette question est extrêmement mal posée
En effet la définition d'une similitude indirecte est qu'elle change l'orientation des angles.
Une formulation correcte de la question serait plutôt :
Prouver qu'une similitude d'expression complexe $z' = a\times\overline{z}+b$ est indirecte.

Soient C et D les points d'affixes respectives :
$$c=3 \quad \text{et} \quad d=1-3i$$
On appelle s_1 la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1, symétrique de M par rapport à l'axe des réels $(O;\vec{u})$.

2.a. Placer les points C et D, puis leurs images respectives C_1 et D_1 par s_1. On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

Voir à la fin du présent document

2.b. Donner l'expression complexe de s_1.

Pour celles et ceux qui ne l'auraient pas remarqué, s_1 est la symétrie axiale d'axe $(O;\vec{u})$.
L'une de ses écritures complexes est :
$$z' = s_1(z)=\overline{z}$$

Soit s_2 la similitude directe définie par :
- Le point C_1 et son image C' d'affixe $c' = 1+4i$
- Le point D_1 et son image D' d'affixe $d' = -2+2i$

Encore une mauvaise formulation ! Deux paires de points distincts suffisent à définir une similitude indirecte...

3.a. Montrer que l'expression complexe de s_2 est :
$$z' = i\times z+1+i$$

Les affixes des points C_1 et D_1 sont données par :
$$c_1 = s_1(c)=\overline{c}=\overline{3}=3 \qquad d_1 = s_1(d)=\overline{d}=\overline{1-3i}=1+3i$$

Comme s_2 est une similitude directe, alors l'une de ses écritures complexes est de forme affine :
$$z' = s_2(z) = a.z+b$$
où a et b sont deux coefficients complexes que nous allons déterminer.

Ensuite :
$$s_2(C_1)=C' \Leftrightarrow a\times c_1+b=c' \Leftrightarrow 3\times a+b=1+4i \quad \textit{(1)}$$
$$s_2(D_1)=D' \Leftrightarrow a\times d_1+b=d' \Leftrightarrow (1+3i)\times a+b=-2+2i \quad \textit{(2)}$$

En soustrayant les deux équations, c'est-à-dire en effectuant ***(1)−(2)***, il vient alors :
$$\left(3\times a+\cancel{b}\right)-\left((1+3i)\times a+\cancel{b}\right)=(1+4i)-(-2+2i) \Leftrightarrow (2-3i)\times a = 3+2i$$

Nous en déduisons :
$$a=\frac{3+2i}{2-3i}=\frac{(3+2i)\times(2+3i)}{(2-3i)\times(2+3i)}=\frac{6+9i+4i+6.i^2}{2^2-(3i)^2}=\frac{\cancel{6}+13i-\cancel{6}}{4-(-9)}=\frac{\cancel{13}i}{\cancel{13}}=i$$

Pour obtenir l'ordonnée à l'origine b, nous remplaçons a par sa valeur dans l'équation *(1)*.

$$3\times \boldsymbol{i}+\mathrm{b}=1+4\boldsymbol{i} \iff \mathrm{b}=1+4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{i}=\underline{1+\boldsymbol{i}}$$

<u>Conclusion :</u> une écriture de la similitude directe $\boldsymbol{s}$ est bien :

$$\underline{\mathrm{z}'=\boldsymbol{s}_2(\mathrm{z})=\boldsymbol{i}\times\mathrm{z}+1+\boldsymbol{i}}$$

Une autre méthode beaucoup plus rapide...mais pas trop dans l'esprit !!!
Soit $\boldsymbol{g}$ la similitude directe dont une écriture complexe est :

$$\boldsymbol{g}(\mathrm{z})=\boldsymbol{i}\times\mathrm{z}+1+\boldsymbol{i}$$

Déterminons les images des points C_1 et D_1 par $\boldsymbol{g}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}(c_1)=\boldsymbol{i}\times 3+1+\boldsymbol{i}=3\boldsymbol{i}+1+\boldsymbol{i}=1+4\boldsymbol{i}=c' \\ \boldsymbol{g}(d_1)=\boldsymbol{i}\times(1+3\boldsymbol{i})+1+\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}+3.\boldsymbol{i}^2+1+\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}-3+1+\boldsymbol{i}=-2+2\boldsymbol{i}=d' \end{cases}$$

Donc les images des points distincts C_1 et D_1 par la similitude directe $\boldsymbol{g}$ sont les points distincts C' et D'. Etant donné qu'il n'existe qu'une seule similitude directe réalisant cette correspondance, nous en déduisons :

$$\underline{\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{g}}$$

Et les écritures complexes de l'une sont aussi celles de l'autre !!!

3.b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

Comme son expression complexe n'est pas de la forme $\mathrm{z}'=\mathrm{z}+\mathrm{b}$, alors la similitude directe $\boldsymbol{s}_2$ n'est pas une translation et est définie par son rapport, son angle et son centre.

- Le rapport de $\boldsymbol{s}_2$ est le module de son coefficient directeur :

$$\mathrm{Rapport}(\boldsymbol{s}_2)=|\boldsymbol{i}|=\underline{1}$$

Donc la similitude $\boldsymbol{s}_2$ est une isométrie...directe donc une rotation !

- Un des angles de $\boldsymbol{s}_2$ est un argument de son coefficient directeur :

$$\mathrm{Angle}(\boldsymbol{s}_2)=\arg(\boldsymbol{i})=\underline{\frac{\pi}{2}} \quad \text{modulo } 2\pi$$

- L'affixe ω du centre Ω qui est l'unique point fixe de $\boldsymbol{s}_2$ est l'unique solution de l'équation :

$$\boldsymbol{s}_2(\omega)=\omega \iff \boldsymbol{i}\times\omega+1+\boldsymbol{i}=\omega \iff 1+\boldsymbol{i}=\omega\times(1-\boldsymbol{i})$$

$$\iff \omega=\frac{1+\boldsymbol{i}}{1-\boldsymbol{i}}=\frac{(1+\boldsymbol{i})\times(1+\boldsymbol{i})}{(1-\boldsymbol{i})\times(1+\boldsymbol{i})}=\frac{1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}^2}{1-\boldsymbol{i}^2}=\frac{\cancel{1}+2\boldsymbol{i}-\cancel{1}}{1-(-1)}=\frac{\cancel{2}\boldsymbol{i}}{\cancel{2}}=\underline{\boldsymbol{i}}$$

<u>Conclusion :</u> la similitude directe $\boldsymbol{s}_2$ est la rotation de centre Ω d'affixe $\boldsymbol{i}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Commentaire :
D'entrée, l'écriture complexe de $\boldsymbol{s}_2$ indiquait qu'il s'agissait d'une rotation...

Soit $\boldsymbol{s}$ la similitude définie par :

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_2\circ\boldsymbol{s}_1$$

4. Déterminer l'expression complexe de $\boldsymbol{s}$.

Pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}(\mathrm{z})&=\boldsymbol{s}_2\circ\boldsymbol{s}_1(\mathrm{z})\\&=\boldsymbol{s}_2[\boldsymbol{s}_1(\mathrm{z})]=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{s}_1(\mathrm{z})+1+\boldsymbol{i}=\underline{\boldsymbol{i}\times\overline{\mathrm{z}}+1+\boldsymbol{i}}\end{aligned}$$

Commentaire :
Encore une question dont on devine difficilement la difficulté...

On pourra admettre désormais que $\boldsymbol{s}$ est la similitude indirecte d'expression complexe :

$$\mathrm{z}'=\boldsymbol{i}\times\overline{\mathrm{z}}+1+\boldsymbol{i}$$

5.a. Quelles sont les images des points C et D par $\boldsymbol{s}$?

La similitude $\boldsymbol{s}$ est la composée de la symétrie axiale $\boldsymbol{s}_1$ suivie de la rotation $\boldsymbol{s}_2$.
Par conséquent, les images des points C et D par $\boldsymbol{s}$ sont données par :

$$\mathrm{C}\xrightarrow{\boldsymbol{s}_1}\mathrm{C}_1\xrightarrow{\boldsymbol{s}_2}\mathrm{C}'$$

$$\mathrm{D}\xrightarrow{\boldsymbol{s}_1}\mathrm{D}_1\xrightarrow{\boldsymbol{s}_2}\mathrm{D}'$$

<u>Conclusion :</u> les images des points C et D par la similitude $\boldsymbol{s}$ sont les points C' et D'.

5.b. Soit H le point d'affixe h tel que :

$$h-c=\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\times(d-c)$$

Montrer que le triangle CDH est équilatéral direct.

Comme les affixes des points H, C et D vérifient l'égalité :

$$h-c=\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\times(d-c)$$

alors le point H est l'image du point D par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Par conséquent, nous avons :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CD}}=1 \iff \mathrm{CH}=\mathrm{CD}}_{\text{Le triangle CDH est isocèle en C}} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{CD}},\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right)=\frac{\pi}{3}\ \text{modulo } 2\pi}_{\text{L'angle au sommet C mesure }+60°}$$

<u>Conclusion :</u> le triangle CDH est équilatéral. Le point H se construit comme étant le troisième point du triangle équilatéral direct CDH.

Une autre manière de faire...en sautant la rotation

L'égalité définissant l'affixe du point H s'écrit aussi :

$$h-c=\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\times(d-c) \Leftrightarrow \frac{h-c}{d-c}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}$$

Il vient alors :

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CD}}=\left|\frac{h-c}{d-c}\right|=\left|\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\right|=1 \quad \underline{\text{et}} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{CD}},\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right)=\arg\left(\frac{h-c}{d-c}\right)=\arg\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{\pi}{3}$$

5.c. Soit H' l'image de H par ***s***.
Préciser la nature du triangle $\mathrm{C'D'H'}$ et construire le point H'. On ne demande pas de calculer l'affixe h' du point H'.

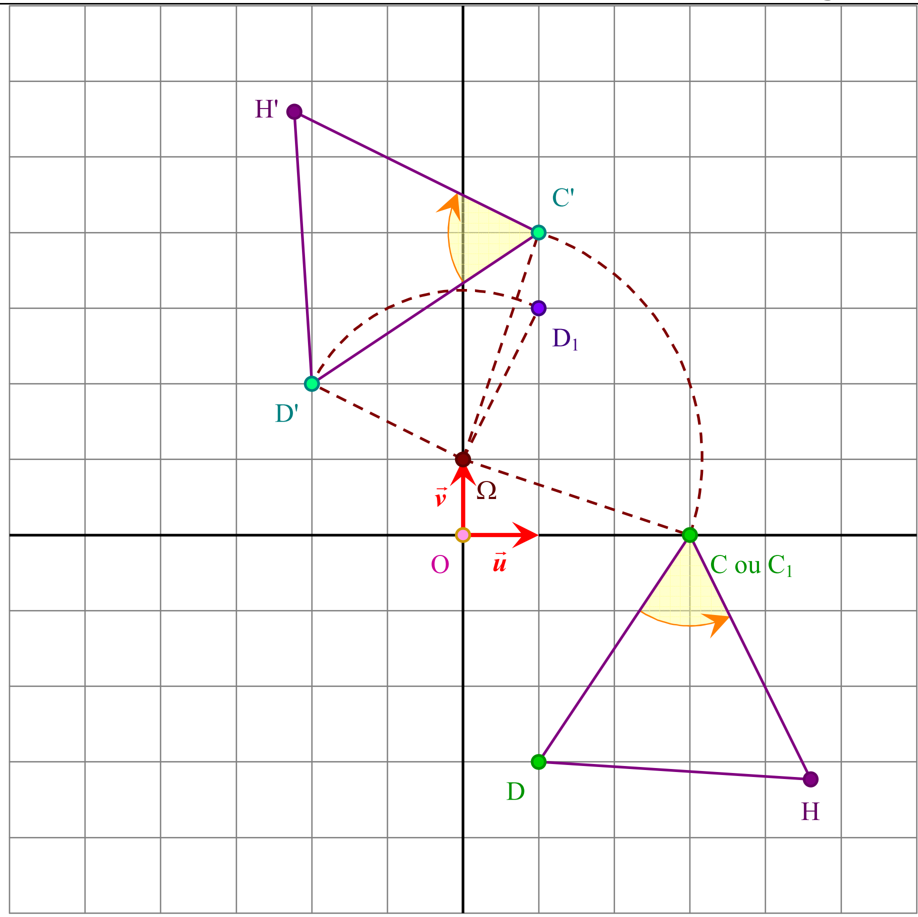
Intéressons-nous à la transformation ***s***.
D'abord, comme ***s*** est la composée de l'isométrie indirecte s_1 (une symétrie axiale) suivie de l'isométrie directe s_2 (une rotation), alors la similitude ***s*** est elle-même une isométrie indirecte. C'est-à-dire qu'elle conserve les longueurs mais qu'elle change l'orientation des angles.
Ces choses ayant été dites, comme :

$$\begin{cases} s(\mathrm{C})=\mathrm{C}' \\ s(\mathrm{D})=\mathrm{D}' \\ s(\mathrm{H})=\mathrm{H}' \end{cases}$$

alors :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{C'H'}}{\mathrm{C'D'}}=\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CD}}=1}_{\text{Le triangle C'D'H' est iscocèle en C}} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{C'D'}},\overrightarrow{\mathrm{C'H'}}\right)=-\left(\overrightarrow{\mathrm{CD}},\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right)=-\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)}_{\text{...et même équilatéal indirect !}}$$

<u>Conclusion :</u> le triangle $\mathrm{C'D'H'}$ est équilatéral indirect. Comme ainsi que l'on construit le point H'.



La réalité de l'isométrie indirecte s_2

Il n'existe que deux types d'isométries indirectes : les symétries axiales et les symétries glissées. Les premières ont une droite de points fixes, les secondes n'en ont pas.
Déterminons les points M d'affixe $z=x+\boldsymbol{i}.y$ qui sont fixes par l'isométrie indirecte s_2.

$$s_2(z)=z \Leftrightarrow \boldsymbol{i}\times\overline{z}+1+\boldsymbol{i}=z \Leftrightarrow \boldsymbol{i}\times(x-\boldsymbol{i}.y)+1+\boldsymbol{i}=x+\boldsymbol{i}.y$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\boldsymbol{i}.x+y+1+\boldsymbol{i}=x+\boldsymbol{i}.y}^{\text{Des complexes égaux...}} \Leftrightarrow \begin{cases}\overbrace{y+1=x}^{\text{Parties réelles égales...}} \\ x-y=1\end{cases} \quad \underline{\text{et}} \quad \begin{cases}\overbrace{x+1=y}^{\text{Parties imaginaires égales...}} \\ x-y=-1\end{cases}$$

Donc l'isométrie indirecte s_2 n'a aucun point fixe.

<u>Conclusion :</u> l'isométrie indirecte s_2 est une symétrie glissée.