## Partie A

On considère le système de congruence :

$$(S)\begin{cases} n \equiv 2 \quad \text{modulo } 3 \\ n \equiv 1 \quad \text{modulo } 5 \end{cases} \quad \text{où } n \text{ est un entier relatif.}$$

### 1) Montrer que 11 est une solution de (*S*).

Comme $\begin{cases} 11 = 3\times 3+2 \equiv 3\times 0+2 \equiv 2 \quad \text{modulo } 3 \\ 11 = 2\times 5+1 \equiv 2\times 0+1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 5 \end{cases}$, alors 11 est une solution du système (*S*). Reste à savoir s'il y en a d'autres. C'est l'objet des questions suivantes.

### 2) Montrer que si $n$ est une solution de (*S*), alors $n-11$ est divisible par 3.

Si $n$ est une solution du système, alors il vérifie les égalités $\begin{cases} n \equiv 2 \quad \text{modulo } 3 & \textbf{\textit{(1)}} \\ n \equiv 1 \quad \text{modulo } 5 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$.

Intéressons-nous à la différence $n-11$ ...modulo 3. Nous pouvons écrire :

$$n-11 \equiv \underbrace{2-2}_{\text{Egalité } (1)} \equiv 0 \quad \text{modulo } 3$$

Donc 3 divise la différence $n-11$.

### 3) Montrer que les solutions de (*S*) sont tous les entiers de la forme $11+15\times k$ où $k$ désigne un entier relatif.

Deux choses sont à établir dans cette question :

***1.*** D'abord, tout entier relatif de la forme $11+15\times k$ est-il solution du système (*S*) ?
Regardons si ce type d'entier vérifie les deux égalités formant (*S*).

$$\begin{cases} 11+15\times k \equiv 2+3\times 5\times k \equiv 2+0\times 5\times k \equiv 2+0 \equiv 2 \quad \text{modulo } 3 & \textbf{\textit{(1)}} \text{ est vérifiée} \\ 11+15\times k \equiv 1+5\times 3\times k \equiv 1+0\times 3\times k \equiv 1+0 \equiv 1 \quad \text{modulo } 5 & \textbf{\textit{(2)}} \text{ est vérifiée} \end{cases}$$

Donc tout entier de la forme $11+15\times k$ est solution du système (*S*).

***2.*** Réciproquement, toute solution $n$ de (*S*) est-elle un entier de la forme $11+15\times k$ ?
Si l'entier $n$ est solution de (S), alors d'après la question A.2, la différence $n-11$ est divisible par 3.
De plus, comme $n-11 \equiv \underbrace{1-1}_{\text{Egalités } (2)} \equiv 0 \quad \text{modulo } 5$, alors $n-11$ est aussi divisible par 5.

Les facteurs 3 et 5 étant premiers (entre eux), la différence $n-11$ est donc divisible par leur produit $3\times 5 = 15$.
Par conséquent, il existe un entier relatif $k$ tel que $n-11 = 15\times k \Leftrightarrow n = 11+15\times k$.

<u>Conclusion :</u> les solutions du système (*S*) sont les entiers relatifs de la forme $11+15\times k$ où $k$ est un entier relatif.

## Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application ***f*** du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe $z'$ et **g** celle qui a tout point M d'affixe z associe le point d'affixe $z''$ définies par :

$$z' = \frac{1+\boldsymbol{i}.\sqrt{3}}{2}.z \qquad\qquad z'' = e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{5}}.z$$

### 1) Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications *f* et *g*.

Pour plus de clarté, appelons $M'$ et $M''$ les points d'affixes respectives $z'$ et $z''$.

$\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont respectivement les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{3}$. Il vient alors pour ***f*** :

$$z' = \frac{1+\boldsymbol{i}.\sqrt{3}}{2}.z \Leftrightarrow \underbrace{z'-0 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\times z = e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{3}}\times(z-0)}_{\text{Ecriture complexe d'une rotation de centre O et d'angle } \pi/3}$$

$\Leftrightarrow$ $M'$ est l'image de M par la rotation ***f*** de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Pour la transformation ***g***, les choses sont plus directes :

$$z'' = e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{5}}.z \Leftrightarrow \underbrace{z''-0 = e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{5}}\times(z-0)}_{\text{Ecriture complexe d'une rotation de centre O et d'angle } \pi/5}$$

$\Leftrightarrow$ $M''$ est l'image de M par la rotation ***g*** de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$

**2)** On considère les points $A_0$ et $B_0$ d'affixes respectives $a_0 = 2.e^{-2.\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{3}}$ et $b_0 = 4.e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{5}}$.
Soient $(A_n)$ et $(B_n)$ les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = \boldsymbol{f}(A_n) \qquad\qquad B_{n+1} = \boldsymbol{g}(B_n)$$

On note $a_n$ et $b_n$ les affixes respectives de $A_n$ et $B_n$.

### 2.a) Quelle est la nature de chacun des triangles $OA_nA_{n+1}$ ?

Comme le point $A_{n+1}$ est l'image de $A_n$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors :

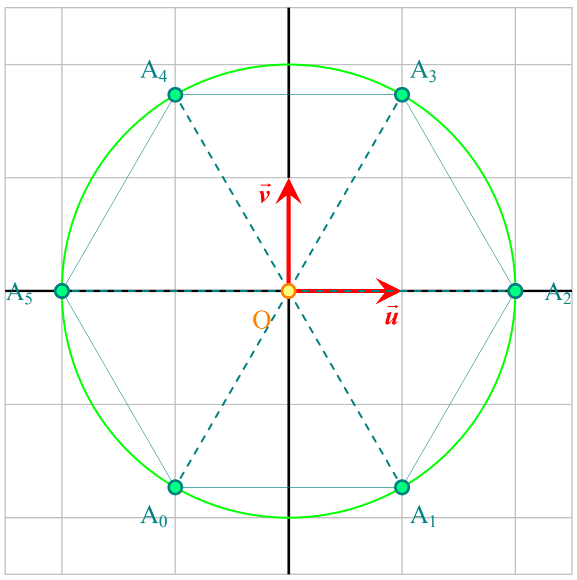
$$\underbrace{\underbrace{OA_n = OA_{n+1}}_{\text{Le triangle } OA_nA_{n+1} \text{ est isocèle en O}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\left(\overrightarrow{OA_n},\overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{3}}_{\text{L'angle au sommet O mesure } \pi/3}}_{\text{Donc le triangle } OA_nA_{n+1} \text{ est équilatéral...direct.}}$$

**2.b)** En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ .

L'hexagone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est formé de six triangles équilatéraux consécutifs.
On établit sans peine que ses six côtés sont égaux :

$$\begin{aligned} A_0A_1 &= OA_1 = A_1A_2 \\ &= OA_2 = A_2A_3 \\ &= OA_3 = A_3A_4 \\ &= OA_4 = A_4A_5 \\ &= OA_5 = A_5A_0 \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u>
$A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est un hexagone régulier de centre O.




On entrevoit déjà que la suite des points $(A_n)$ est cyclique selon une période de 6.

**3.a)** Montrer que les points $B_n$ sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Comme :

$$OB_0 = |b_0| = \left|4.e^{-i.\frac{\pi}{5}}\right| = |4| \times \left|e^{-i.\frac{\pi}{5}}\right| = 4 \times 1 = 4$$

alors le point $B_0$ appartient au cercle de centre O et de rayon 4.

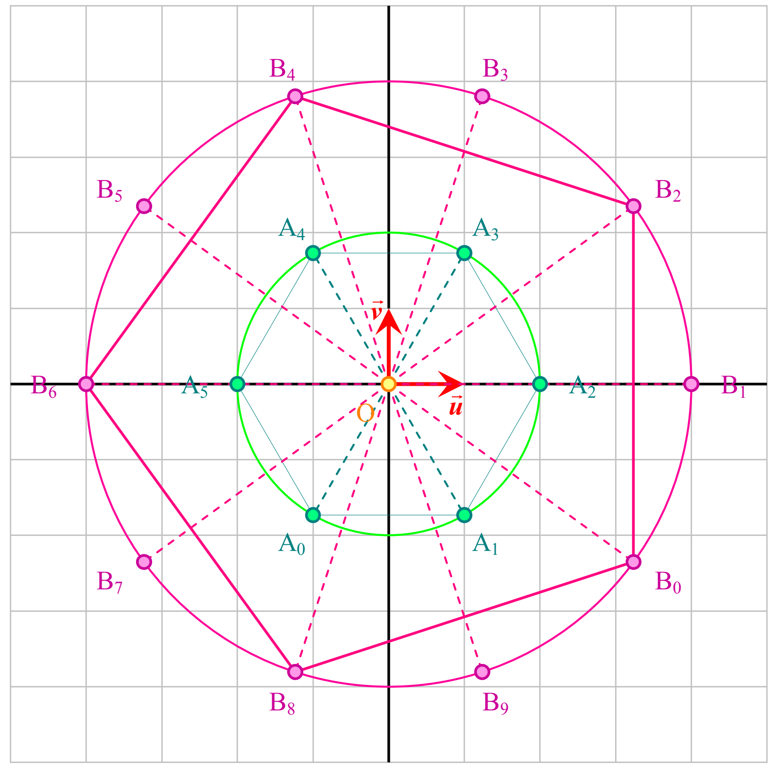
Montrons par récurrence qu'il en va de même pour les autres points $B_n$ .

Nous avons déjà prouvé que cette propriété était vraie au premier rang pour $n = 0$ .
Il reste à établir le principe de récurrence ou de propagation.
Si le point $B_n$ appartient au cercle de centre O et de rayon 4, alors $OB_n = 4$ .
Comme le point $B_{n+1}$ est l'image de $B_n$ par la rotation g de centre O, alors :

$$\underbrace{OB_{n+1} = OB_n}_{\text{Les deux points sont sur la même orbite de centre O.}} = 4$$

Donc le point $B_{n+1}$ appartient alors aussi au cercle de centre O et de rayon 4.
Le principe de récurrence est établi.
<u>Conclusion :</u> tous les points $B_n$ appartiennent au cercle de rayon 4 et de centre O.

*Même si elle n'est pas demandée, la figure finale est la suivante :*




Sur la figure, on entrevoit que la suite des points $(B_n)$ est aussi cyclique selon une période de 10

**3.b)** Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}\right)$.

Comme par la rotation ***g*** de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$ :

- Le point $B_{n+1}$ est l'image de $B_n$ , alors $\left(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{5}$
- Le point $B_{n+2}$ est l'image de $B_{n+1}$ , alors $\left(\overrightarrow{OB_{n+1}}, \overrightarrow{OB_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{5}$

Nous en déduisons :

$$\left(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}\right) = \underbrace{\left(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+1}}\right) + \left(\overrightarrow{OB_{n+1}}, \overrightarrow{OB_{n+2}}\right)}_{\text{Relation de Chasles}} = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{2.\pi}{5}$$

**3.c)** En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

Comme :

- $B_0$ ; $B_2$ ; $B_4$ ; $B_6$ et $B_8$ appartiennent au même cercle de centre O et de rayon 4.
- $\underbrace{\left(\overrightarrow{OB_0},\overrightarrow{OB_2}\right)=\left(\overrightarrow{OB_2},\overrightarrow{OB_4}\right)=\left(\overrightarrow{OB_4},\overrightarrow{OB_6}\right)=\left(\overrightarrow{OB_6},\overrightarrow{OB_8}\right)=\left(\overrightarrow{OB_8},\overrightarrow{OB_0}\right)=\frac{2.\pi}{5}}_{\text{Les angles au centre du cercle de centre O et de rayon 4 mesurent tous } 2\pi/5.}$

alors le polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$ est un pentagone régulier de centre O.

**4.a)** Exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

Nous savons déjà que $a_0=2.e^{-2.i.\frac{\pi}{3}}$ et $b_0=4.e^{-i.\frac{\pi}{5}}$.

Pour avoir une idée des expressions de $a_n$ et $b_n$ (en fonction de $n$), regardons ce qui se passent sur les deux premiers termes de chacune de ces deux suites.

$$a_1=f(a_0)=\underbrace{e^{i.\frac{\pi}{3}}\times 2.e^{-2.i.\frac{\pi}{3}}}_{\text{La rotation } f \text{ ajoute } \pi/3 \text{ dans l'exponentielle}}=2\times e^{i.\frac{\pi}{3}-2.i.\frac{\pi}{3}}=2.e^{-i.\frac{\pi}{3}} \quad \text{soit} \quad a_1=2.e^{i.(1-2).\frac{\pi}{3}}$$

$$a_2=f(a_1)=\underbrace{e^{i.\frac{\pi}{3}}\times 2.e^{-i.\frac{\pi}{3}}=2\times e^{i.\frac{\pi}{3}-i.\frac{\pi}{3}}=2.e^0=2\times 1=2}_{\text{La rotation } f \text{ ajoute } \pi/3 \text{ dans l'exponentielle}} \quad \text{soit} \quad a_2=2.e^{i.(2-2).\frac{\pi}{3}}$$

$$b_1=g(b_0)=\underbrace{e^{i.\frac{\pi}{5}}\times 4.e^{-i.\frac{\pi}{5}}=4\times e^{i.\frac{\pi}{5}-i.\frac{\pi}{5}}=4\times e^0=4\times 1=4}_{\text{La rotation } g \text{ ajoute } \pi/5 \text{ dans l'exponentielle}} \quad \text{soit} \quad b_1=4\times e^{i.(1-1).\frac{\pi}{5}}$$

$$b_2=g(b_1)=\underbrace{e^{i.\frac{\pi}{5}}\times 4}_{g \text{ ajoute } \pi/5 \text{ dans l'exponentielle}}=4\times e^{i.\frac{\pi}{5}} \quad \text{soit} \quad b_2=4\times e^{i.(2-1).\frac{\pi}{5}}$$

Vu ces quatre premiers termes, il semble que pour tout entier naturel $n$, nous ayons :

$$a_n=2\times e^{i.(n-2).\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad b_n=4\times e^{i.(n-1).\frac{\pi}{5}}$$

Une impression n'étant pas une certitude, il reste à prouver ces deux formules.

Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ étant définies par récurrence, procédons par...récurrence sur l'entier $n$.

Nous savons déjà qu'elles sont vraies aux premiers rangs $n=1$, $n=2$ et même $n=0$.

Il reste juste à établir le principe de récurrence. Nos formules se transmettent-elles d'un rang $n$ sur le suivant $n+1$.

**Note :** rassure-toi chez candidat, déjà si tu as trouvé les deux formules, c'est bien ! Il faut bien toute l'obsession de rigueur d'un prof de maths pour songer à les démontrer car elles sont assez...évidentes.

Si $a_n=2\times e^{i.(n-2).\frac{\pi}{3}}$ et $b_n=4\times e^{i.(n-1).\frac{\pi}{5}}$, alors il vient :

$$a_{n+1}=\overbrace{f(a_n)=e^{i.\frac{\pi}{3}}\times 2\times e^{i.(n-2).\frac{\pi}{3}}}^{\text{La rotation } f \text{ rajoute } \pi/3 \text{ à l'exponentielle}}=2\times e^{i.\frac{\pi}{3}+i.(n-2).\frac{\pi}{3}}=2\times e^{i.(n+1-2).\frac{\pi}{3}}$$

Donc la formule est vraie au rang $n+1$

$$b_{n+1}=\overbrace{g(b_n)=e^{i.\frac{\pi}{5}}\times 4\times e^{i.(n-1).\frac{\pi}{5}}}^{\text{La rotation } g \text{ rajoute } \pi/5 \text{ à l'exponentielle}}=4\times e^{i.\frac{\pi}{5}+i.(n-1).\frac{\pi}{5}}=4\times e^{i.(n+1-1).\frac{\pi}{5}}$$

Donc la formule est vraie au rang $n+1$

Donc le principe de récurrence est établi.

Conclusion : pour tout entier naturel $n$, on a : $a_n=2\times e^{i.(n-2).\frac{\pi}{3}}$ et $b_n=4\times e^{i.(n-1).\frac{\pi}{5}}$

**4.b)** Montrer que les entier $n$ pour lesquels les points $A_n$ et $B_n$ sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système ($S$) de la partie A.

Un nombre complexe est réel s'il est nul (ce n'est jamais le cas pour $a_n$ et $b_n$) ou si l'un de ses arguments est un multiple de π.

Un argument de $a_n=\underbrace{2\times e^{i.(n-2).\frac{\pi}{3}}}_{\text{Forme Exponentielle}}$ est $(n-2)\times\frac{\pi}{3}$. Par conséquent :

$$a_n \text{ est un réel} \Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{(n-2)\times\frac{\cancel{\pi}}{3}}_{\text{L'argument de } a_n \text{ est un multiple de } \pi}=\lambda\times\cancel{\pi} \Leftrightarrow \underbrace{n-2=3\times\lambda}_{n-2 \text{ est divisible par 3.}}}^{\lambda \text{ est un entier relatif}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n\equiv 2 \quad \text{modulo } 3}_{\text{Par définition de la congruence}}$$

De même, un argument de $b_n=\underbrace{4\times e^{i.(n-1).\frac{\pi}{5}}}_{\text{Forme Exponentielle}}$ étant $(n-1)\times\frac{\pi}{5}$, il vient :

$$b_n \text{ est un réel} \Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{(n-1)\times\frac{\cancel{\pi}}{5}}_{\text{L'argument de } b_n \text{ est un multiple de } \pi}=\mu\times\cancel{\pi} \Leftrightarrow \underbrace{n-1=3\times\mu}_{n-1 \text{ est divisible par 5.}}}^{\mu \text{ est toujours un (autre) entier relatif}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n\equiv 1 \quad \text{modulo } 5}_{\text{Par définition de la congruence}}$$

Conclusion : Pour que les points $A_n$ et $B_n$ soient simultanément sur l'axe des réels, il faut et il suffit que l'entier $n$ vérifie les deux équations du système $(S)\begin{cases} n\equiv 2 & \text{modulo } 3\\ n\equiv 1 & \text{modulo } 5\end{cases}$

**La périodicité par les expressions.**

Les périodicités des suites la suite $(a_n)$ et $(b_n)$ peut être établie (confirmées) avec leurs expressions de $a_n$ et $b_n$ issues de la question B.3.c.

Pour tout entier naturel $n$, nous avons :

$$\underbrace{a_{n+6} = 2\times e^{\boldsymbol{i}.(n+6-2).\frac{\pi}{3}} = 2\times e^{\boldsymbol{i}.(n-2).\frac{\pi}{3}+\frac{6.\pi}{3}} = 2\times e^{\boldsymbol{i}.(n-2).\frac{\pi}{3}} \times e^{\boldsymbol{i}.2\pi} = a_n \times 1 = a_n}_{\text{La suite } (a_n) \text{ est 6-périodique}}$$

$$\underbrace{b_{n+10} = 4\times e^{\boldsymbol{i}.(n+10-1).\frac{\pi}{5}} = 4\times e^{\boldsymbol{i}.(n-1).\frac{\pi}{5}+\frac{10.\pi}{5}} = 4\times e^{\boldsymbol{i}.(n-1).\frac{\pi}{5}} \times e^{\boldsymbol{i}.2\pi} = b_n \times 1 = b_n}_{\text{La suite } (b_n) \text{ est 10-périodique.}}$$

Tout cela est bien normal car il faut six bonds de $\frac{\pi}{3}$ ou dix sauts de $\frac{\pi}{5}$ pour faire un tour de cercle de $2\pi$ radians,