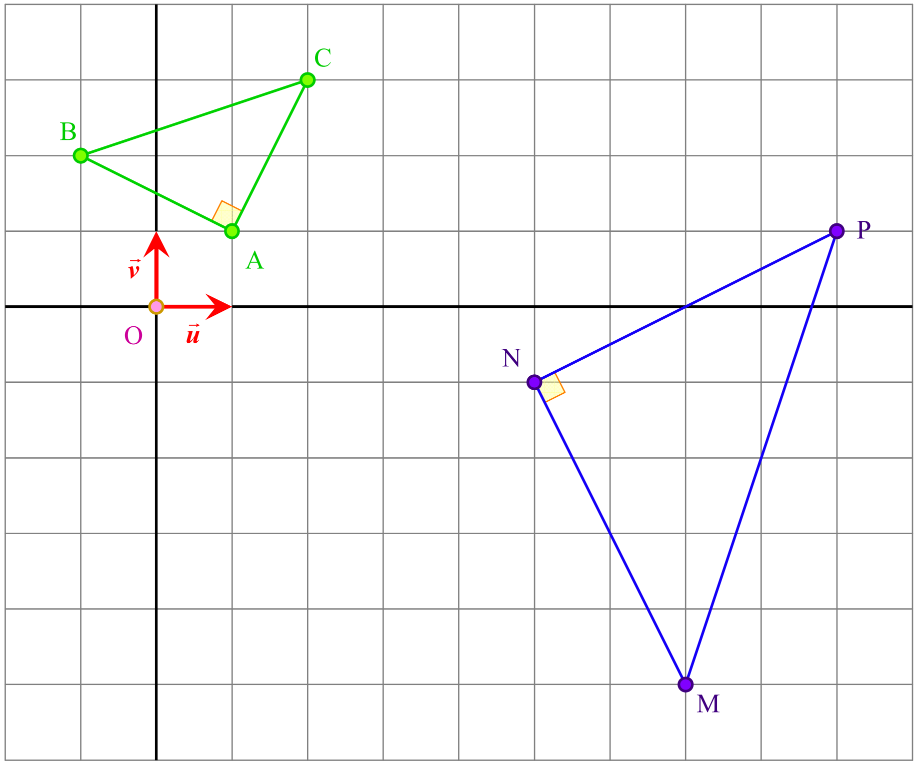
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique un centimètre. Dans ce dernier, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$a = 1+\boldsymbol{i}$ $\quad b = -1+2\boldsymbol{i}$ $\quad c = 2+3\boldsymbol{i}$ $\quad m = 7-5\boldsymbol{i}$ $\quad n = 5-\boldsymbol{i}$ $\quad p = 9+\boldsymbol{i}$

1.a. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.

La figure est la suivante :



1.b Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et MNP.

Calculons les longueurs des trois côtés du triangle ABC :

$$\mathrm{AB} = |b-a| = |(-1+2\boldsymbol{i})-(1+\boldsymbol{i})| = |-2+\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$\mathrm{AC} = |c-a| = |(2+3\boldsymbol{i})-(1+\boldsymbol{i})| = |1+2\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$\mathrm{BC} = |c-b| = |(2+3\boldsymbol{i})-(-1+2\boldsymbol{i})| = |3+\boldsymbol{i}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Ce n'est pas demandé mais nous remarquons :

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 = 5+5 = 10 = \mathrm{AB}^2$$
$$\mathrm{AB} = \sqrt{5} = \mathrm{AC}$$

En application du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle et aussi isocèle en A.

A présent, intéressons-nous aux longueurs des trois côtés du triangle MNP :

$$\mathrm{MN} = |n-m| = |(5-\boldsymbol{i})-(7-5\boldsymbol{i})| = |-2+4\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2.\sqrt{5}$$
$$\mathrm{MP} = |p-m| = |(9+\boldsymbol{i})-(7-5\boldsymbol{i})| = |2+6\boldsymbol{i}| = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2.\sqrt{10}$$
$$\mathrm{PN} = |p-n| = |(9+\boldsymbol{i})-(5-\boldsymbol{i})| = |4+2\boldsymbol{i}| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2.\sqrt{5}$$

Là encore, ce n'est pas demandé mais nous observons :

$$\mathrm{MN}^2+\mathrm{PN}^2 = 20+20 = \mathrm{MP}^2$$
$$\mathrm{MN} = 2\sqrt{5} = \mathrm{PN}$$

Donc le triangle MNP est rectangle et isocèle en N.

1.c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Comme :

$$\frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{BC}} = 2$$

C'est comme en seconde : Les côtés de ces triangles sont proportionnels

alors les triangles ABC et NMP sont semblables.

On énonce les sommets dans l'ordre de correspondance.

Une autre manière de voir la similitude entre les deux triangles

Comme les deux triangles sont isocèles et rectangles, alors ils ont en communs :

Deux angles égaux : $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{MNP}} = \frac{\pi}{2}$ radians

Deux paires de côtés proportionnels : $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{NM}} = \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{NP}}$

Donc les triangles ABC et NMP sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP.

2. Une similitude directe

Soit $\boldsymbol{s}$ la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.

2.a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude ***s*** est :

$$z' = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\boldsymbol{i}\right)\times z+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}.\boldsymbol{i}$$

D'abord, comme ***s*** est une similitude directe, alors l'une de ses écritures complexes est de forme affine :

$$z' = \alpha.z+\beta$$

où α et β sont deux coefficients complexes que nous allons déterminer.

Nous allons garder les lettres aussi longtemps que possible afin d'éviter des calculs trop lourds...

Ensuite :

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}(A)=N \iff \alpha\times a+\beta=n \iff \boxed{\beta=n-\alpha\times a} & \textbf{\textit{(1)}} \\ \boldsymbol{s}(B)=P \iff \alpha\times b+\beta=p \iff \boxed{\beta=p-\alpha\times b} & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

En concaténant les équations ***(1)*** et ***(2)***, nous aboutissons à :

$$n-\alpha\times a=\beta=p-\alpha\times b \iff \alpha\times b-\alpha\times a=p-n \iff \alpha\times(b-a)=p-n$$

Nous en déduisons :

$$\alpha=\frac{p-n}{b-a}=\frac{(9+\boldsymbol{i})-(5-\boldsymbol{i})}{(-1+2\boldsymbol{i})-(1+\boldsymbol{i})}=\frac{4+2\boldsymbol{i}}{-2+\boldsymbol{i}}$$

$$=\frac{(4+2\boldsymbol{i})\times(-2-\boldsymbol{i})}{(-2+\boldsymbol{i})\times(-2-\boldsymbol{i})}=\frac{-8-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{i}-2.\boldsymbol{i}^2}{(-2)^2-\boldsymbol{i}^2}=\frac{-8-8\boldsymbol{i}+2}{4-(-1)}=\boxed{\frac{-6-8\boldsymbol{i}}{5}}$$

En remplaçant α par sa valeur dans l'équation ***(1)***, nous obtenons β.

$$\beta=n-\alpha\times a=5-\boldsymbol{i}-\frac{-6-8\boldsymbol{i}}{5}\times(1+\boldsymbol{i})=5-\boldsymbol{i}+\frac{6+6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{i}-8}{5}=\frac{25-5\boldsymbol{i}-2+14\boldsymbol{i}}{5}=\boxed{\frac{23+9\boldsymbol{i}}{5}}$$

<u>Conclusion :</u> une écriture de la similitude directe ***s*** est bien :

$$\boxed{z'=\boldsymbol{s}(z)=-\frac{6+8\boldsymbol{i}}{5}\times z+\frac{23+9\boldsymbol{i}}{5}}$$

Une autre méthode plus rapide et moins lourde aussi

Une méthode plus rapide pour répondre à cette question aurait pu être de calculer les affixes des images des points A et B par la similitude directe ***g*** d'écriture complexe :

$$\boldsymbol{g}(z)=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\boldsymbol{i}\right)\times z+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}.\boldsymbol{i}$$

Nous aurions alors trouvé :

$$\boldsymbol{g}(a)=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\boldsymbol{i}\right)\times(1+\boldsymbol{i})+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}.\boldsymbol{i}=\frac{-6-6\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{i}+8+23+9\boldsymbol{i}}{5}=\frac{25-5\boldsymbol{i}}{5}=n$$

$$\boldsymbol{g}(b)=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\boldsymbol{i}\right)\times(-1+2\boldsymbol{i})+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}.\boldsymbol{i}=\frac{6-12\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{i}+16+23+9\boldsymbol{i}}{5}=\frac{45+5\boldsymbol{i}}{5}=p$$

Donc les images des points distincts A et B par la similitude directe ***g*** sont les points N et P. Vu qu'il n'existe qu'une seule similitude directe faisant cela, nous en aurions déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}}$$

2.b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré près ainsi que le centre de la similitude ***s***.

D'abord, comme aucune écriture complexe de la similitude directe ***s*** n'est de la forme :

$$z'=z+\beta$$

alors celle-ci n'est pas une translation. Elle est donc parfaitement définie par son rapport, un de ses angles et son centre Ω dont nous noterons l'affixe ω.

Le rapport de s peut se calculer de deux manières :

Le rapport de ***s*** est le module de son coefficient directeur

$$\text{Rapport}(\boldsymbol{s})=\left|-\frac{6+8\boldsymbol{i}}{5}\right|=\sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{8}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{36}{25}+\frac{64}{25}}=\sqrt{\frac{100}{25}}=\sqrt{4}=\boxed{2}$$

ou

Le rapport de ***s*** est le quotient des distances images/points

On utilise ce qui a été déjà fait...

Comme $\begin{cases}\boldsymbol{s}(A)=N\\ \boldsymbol{s}(B)=P\end{cases}$ alors $\text{Rapport}(\boldsymbol{s})=\frac{NP}{AB}=\frac{2.\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}}=\boxed{2}$

Un angle de s peut aussi s'obtenir de deux manières :

Soit par rapport aux points et leurs images, soit par rapport au coefficient directeur...

$$\text{angle}(\boldsymbol{s})=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{NP}\right)=\arg\left(\frac{p-n}{b-a}\right)=\arg\left(-\frac{6+8\boldsymbol{i}}{5}\right)\approx-2,21\text{ radians}\approx\boxed{-127°}$$

Vive la calculatrice !

Le centre Ω est l'unique point fixe de la similitude s

L'affixe ω est l'unique solution de l'équation :

$$\boldsymbol{s}(\omega)=\omega \iff -\frac{6+8\boldsymbol{i}}{5}\times\omega+\frac{23+9\boldsymbol{i}}{5}=\omega \iff -(6+8\boldsymbol{i})\times z+23+9\boldsymbol{i}=5\times\omega$$

$$\iff 23+9\boldsymbol{i}=5\times\omega+(6+8\boldsymbol{i})\times\omega \iff 23+9\boldsymbol{i}=(11+8\boldsymbol{i})\times\omega$$

$$\iff \omega=\frac{23+9\boldsymbol{i}}{11+8\boldsymbol{i}}=\frac{(23+9\boldsymbol{i})\times(11-8\boldsymbol{i})}{(11+8\boldsymbol{i})\times(11-8\boldsymbol{i})}=\frac{253-184\boldsymbol{i}+99\boldsymbol{i}+72}{11^2-(8\boldsymbol{i})^2}$$

$$=\frac{325-85\boldsymbol{i}}{185}=\boxed{\frac{65-17\boldsymbol{i}}{37}}$$

Et re-vive la calculatrice !

2.c. Vérifier que la similitude s transforme le point C en M

Calculons l'affixe de l'image du point C par la similitude s.

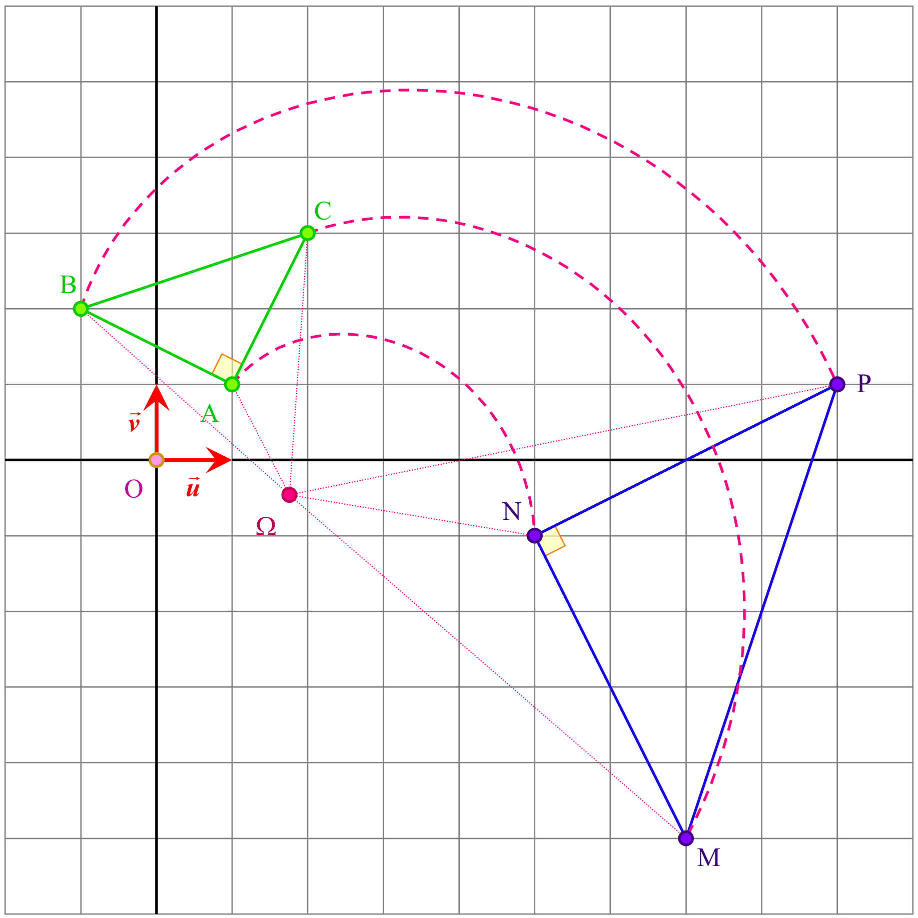
$$s(c)=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\boldsymbol{i}\right)\times\left(2+3\boldsymbol{i}\right)+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}.\boldsymbol{i}$$

$$=\frac{-12-18\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{i}+24+23+9\boldsymbol{i}}{5}=\frac{35-25\boldsymbol{i}}{5}=7-5\boldsymbol{i}=m$$

Donc l'image du point C par la similitude s est bien le point M.

---

*Sur la figure ci-dessous, les points N, P et M sont les images respectives des points A, B et C par la similitude **s** dont le centre est Ω et le rapport 2.*



3. Une similitude indirecte

Soit s' la similitude indirecte dont l'écriture complexe est :

$$z'=2\boldsymbol{i}\times\overline{z}+3-3\boldsymbol{i}$$

3.a. Vérifier que $\begin{cases} s'(\mathrm{A})=\mathrm{N} \\ s'(\mathrm{B})=\mathrm{M} \\ s'(\mathrm{C})=\mathrm{P} \end{cases}$

Calculons les affixes des images des points A, B et C par la similitude indirecte s'.

$$s'(a)=2\boldsymbol{i}\times\overline{a}+3-3\boldsymbol{i}=2\boldsymbol{i}\times\left(1-\boldsymbol{i}\right)+3-3\boldsymbol{i}=2\boldsymbol{i}+2+3-3\boldsymbol{i}=5-\boldsymbol{i}=n$$

$$s'(b)=2\boldsymbol{i}\times\overline{b}+3-3\boldsymbol{i}=2\boldsymbol{i}\times\left(-1-2\boldsymbol{i}\right)+3-3\boldsymbol{i}=-2\boldsymbol{i}+4+3-3\boldsymbol{i}=7-5\boldsymbol{i}=m$$

$$s'(c)=2\boldsymbol{i}\times\overline{c}+3-3\boldsymbol{i}=2\boldsymbol{i}\times\left(2-3\boldsymbol{i}\right)+3-3\boldsymbol{i}=4\boldsymbol{i}+6+3-3\boldsymbol{i}=9+\boldsymbol{i}=p$$

<u>Conclusion :</u> les images des points A, B et C par la similitude indirecte s' sont respectivement N, M et P.

3.b. Démontrer que s' admet un unique point fixe invariant K d'affixe $k=1-\boldsymbol{i}$.

Les affixes des points invariants par la similitude s' sont les solutions de l'équation :

$$s'(z)=z \quad\Leftrightarrow\quad 2\boldsymbol{i}\times\overline{z}+3-3\boldsymbol{i}=z$$

On appelle alors x et y sont parties réelle et imaginaire du nombre complexe z. Nous avons alors :

$$z=x+\boldsymbol{i}.y \qquad \underline{\text{et}} \qquad \overline{z}=x-\boldsymbol{i}.y$$

Ces choses ayant été précisées, l'équation devient :

$$s'(z)=z \quad\Leftrightarrow\quad 2\boldsymbol{i}\times\left(x-\boldsymbol{i}.y\right)+3-3\boldsymbol{i}=x+\boldsymbol{i}.y$$

$$\Leftrightarrow\quad \overbrace{2\boldsymbol{i}.x+2.y+3-3\boldsymbol{i}=x+\boldsymbol{i}.y}^{\text{Deux quantités complexes sont égales...}} \quad\Leftrightarrow\quad \overbrace{2.y+3=x}^{\text{Parties réelles égales...}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{2.x-3=y}^{\text{Parties imaginaires égales...}}$$

Désormais, tout le problème se résume à la résolution du système linéaire 2×2 :

$$\begin{cases} 2.y+3=x & \textbf{\textit{(1)}} \\ 2.x-3=y & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

L'équation ***(1)*** exprime ce que vaut x en fonction de y. Remplaçons x dans ***(2)***.

$$2\times\overbrace{\left(2.y+3\right)}^{\text{x d'après }(1)}-3=y \quad\Leftrightarrow\quad 4.y+6-3=y \quad\Leftrightarrow\quad 3.y=-3 \quad\Leftrightarrow\quad y=-1$$

Nous en déduisons alors x :

$$x=2.y+3=2\times\left(-1\right)+3=-2+3=1$$

<u>Conclusion :</u> la similitude s' admet un unique point fixe. Il a pour affixe $1-\boldsymbol{i}$.

3.c. Soit $\boldsymbol{h}$ l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$. On appelle J le point d'affixe 2.

On pose :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{s}' \circ \boldsymbol{h}$$

Déterminer les images des points K et J par la transformation ***f***.
En déduire la nature précise de la transformation ***f***.

K est un point invariant par l'homothétie $\boldsymbol{h}$ ainsi que par la similitude indirecte $\boldsymbol{s}'$
Par conséquent, il vient :

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{K}) = \boldsymbol{s}' \circ \boldsymbol{h}(\mathrm{K}) = \boldsymbol{s}'\big(\boldsymbol{h}(\mathrm{K})\big) = \boldsymbol{s}'(\mathrm{K}) = \underline{\mathrm{K}}$$

Donc le point K est aussi invariant par la transformation ***f***.

Déterminons l'image du point J par la transformation ***f***.
D'abord, nous devons trouver l'homothétique de J par $\boldsymbol{h}$ que nous appellerons J'.
Ces deux points vérifient l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{\mathrm{KJ}'} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{\mathrm{KJ}} \Leftrightarrow z_{\mathrm{J}'} - k = \frac{1}{2}.(2-k) \Leftrightarrow z_{\mathrm{J}'} = \frac{2}{2} - \frac{k}{2} + k = \frac{2+k}{2} = \frac{2+1-\boldsymbol{i}}{2} = \underline{\frac{3-\boldsymbol{i}}{2}}$$

Maintenant, calculons l'affixe de l'image de J' par la similitude indirecte $\boldsymbol{s}'$.

$$\boldsymbol{s}'(z_{\mathrm{J}'}) = 2\boldsymbol{i} \times \overline{z_{\mathrm{J}'}} + 3 - 3\boldsymbol{i} = \cancel{2}\boldsymbol{i} \times \frac{3+\boldsymbol{i}}{\cancel{2}} + 3 - 3\boldsymbol{i} = \cancel{3\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{i}^2 + 3 - \cancel{3\boldsymbol{i}} = -1 + 3 = \underline{2 = z_{\mathrm{J}}}$$

Ainsi avons-nous :

$$\boldsymbol{f}(\mathrm{J}) = \boldsymbol{s}' \circ \boldsymbol{h}(\mathrm{J}) = \boldsymbol{s}'\big(\boldsymbol{h}(\mathrm{J})\big) = \boldsymbol{s}'(\mathrm{J}') = \underline{\mathrm{J}}$$

Donc le point J est aussi invariant par la transformation ***f***.

➲ La transformation ***f*** est une similitude indirecte car elle est la composée de la similitude directe $\boldsymbol{h}$ de rapport $\frac{1}{2}$ suivie de la similitude indirecte $\boldsymbol{s}'$ de rapport 2.
Or, d'après un théorème du cours, toute similitude qui a au moins deux points fixes est soit une symétrie axiale, soit l'application identique du plan.
Ce théorème s'applique à la similitude ***f*** avec ses points invariants K et J.
Sauf que ***f*** ne peut pas être l'application identique du plan car celle-ci est une similitude directe, alors que ***f*** est indirecte.

<u>Conclusion :</u> ***f*** est une réflexion et plus précisément celle qui a pour axe (KJ)

3.d. Démontrer que la similitude $\boldsymbol{s}'$ est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

La transformation réciproque de l'homothétie $\boldsymbol{h}$ de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ est l'homothétie que nous noterons $\boldsymbol{h}'$ de même centre K mais de rapport 2.

---

*Sur la figure ci-contre, les points A', B' et C' sont les homothétiques par **h'** des points A, B et C. Leurs symétriques par **f** par rapport à l'axe (KJ) sont les points N, M et P* ➚

Cette chose ayant été dite, la situation de la composée $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{s}' \circ \boldsymbol{h}$ peut se schématiser :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L} \arrow[r, shift left, "\boldsymbol{h}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{f}"'] & \mathrm{L}' \arrow[l, shift left, "\boldsymbol{h}'"] \arrow[d, "\boldsymbol{s}'"] \\ & \mathrm{L}'' \end{tikzcd}$$

<u>Conclusion :</u> la similitude indirecte $\boldsymbol{s}'$ est la composée de l'homothétie $\boldsymbol{h}'$ suivie de la réflexion ***f*** d'axe (JK).