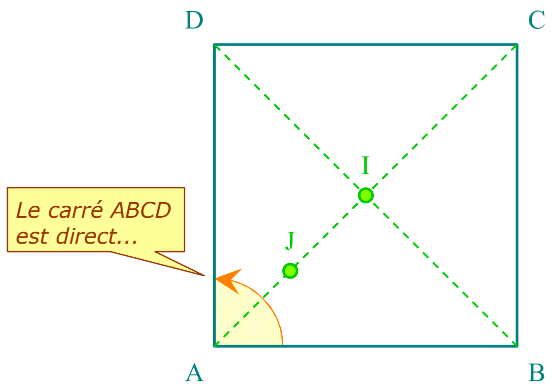
Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct, c'est-à-dire un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$.

On note I son centre et J le milieu de [AI].

Même si elle n'est pas demandée, une figure ne peut pas faire de mal. Ca aide à penser !



1°) C est le barycentre des points pondérés $(A;m)$; $(B;1)$ et $(D;1)$ lorsque :

a. $m=-2$ **b.** $m=2$ **c.** $m=-1$ **d.** $m=3$

Pour répondre à cette question, il nous faut viser une relation vectorielle de la forme :

$$m\times\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\vec{o}$$

Cette relation est la traduction vectorielle (et même la définition) du fait que C est le barycentre des points pondérés $(A;m)$; $(B;1)$ et $(D;1)$.

Comme ABCD est un parallélogramme (c'est même un carré), alors nous avons la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{AB}}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow (-1)\times\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\vec{o}$$

<u>Conclusion :</u> le point C est le barycentre des points pondérés $(A;-1)$; $(B;1)$ et $(D;1)$.

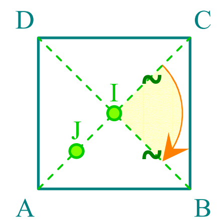
2°) **a.** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}.\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{DB}$.

Examinons les quatre affirmations :



a. Comme l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB}\right)$ mesure $-\frac{\pi}{2}$ radians et comme les distances IC et IB sont égales, alors B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et non $\frac{\pi}{2}$.

Donc la proposition **a** est fausse.

b. Comme :

$$2.\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{CA}=\frac{3}{4}\times 2.\overrightarrow{CI}=\frac{3}{2}.\overrightarrow{CI}$$

alors le point J est l'image de I par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{3}{2}$ et non $\frac{2}{3}$.

Donc la proposition **b** est fausse.

Une autre truc qui coince : une homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ réduisant les longueurs, le point J ne pouvait être l'image de I par cette homothétie vu qu'il est plus éloigné de C.

c. Certes, les sommets B et D sont les symétriques l'un de l'autre par rapport à I.
Cela dit, I étant le milieu du segment [AC], le symétrique de A par rapport à I est C qui est extérieur au triangle DAB. Ce dernier ne peut donc pas être invariant par la symétrie de centre I. Donc la proposition **c** est fausse.

d. Essayons de simplifier la somme vectorielle qui définit le vecteur de translation :

$$\frac{1}{2}.\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{BA}+\underbrace{\frac{1}{4}.\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{AB}}_{\text{Chasles}}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{DA}-\frac{1}{4}.\overrightarrow{BA}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{4}.\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{DA}=\frac{1}{4}.\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{CB}}_{\text{Comme ABCD est un carré, alors }\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}}=\underbrace{\frac{1}{4}.\overrightarrow{CB}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{BA}}_{\text{Chasles}}=\frac{1}{4}.\overrightarrow{CA}$$

Or nous avons bien : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}.\overrightarrow{CA}$. Donc la translation de vecteur $\frac{1}{2}.\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{DB}$ donne pour image J au point I. Ainsi, la proposition **d** est vraie. Il n'y avait plus qu'elle.

3°) L'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\| = AB$ est :

- **a.** la médiatrice du segment [AC].
- **b.** le cercle circonscrit au carré ABCD.
- **c.** la médiatrice du segment [AI].
- **d.** le cercle inscrit dans le carré ABCD.

Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M vérifiant l'égalité : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\| = AB$

L'isobarycentre des deux points pondérés $(A;1)$ et $(C;1)$ est leur milieu I.

Cet isobarycentre I vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{o}$$

Pour tout point M du plan, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} = \overbrace{\underbrace{\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}}_{\overrightarrow{MA}}+\underbrace{\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}}_{\overrightarrow{MC}} = 2.\overrightarrow{MI}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}}_{=\vec{o}}}^{\text{Nous démontrons le théorème de réduction vectorielle}} = 2.\overrightarrow{MI}$$

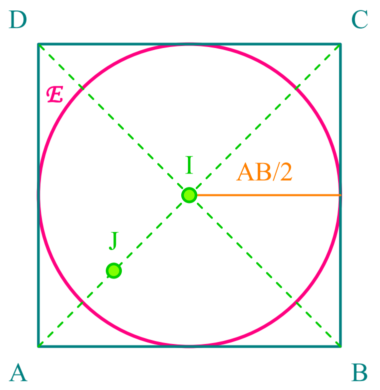
L'égalité définissant l'ensemble $\mathcal{E}$ se simplifie alors sacrément ! Il vient :

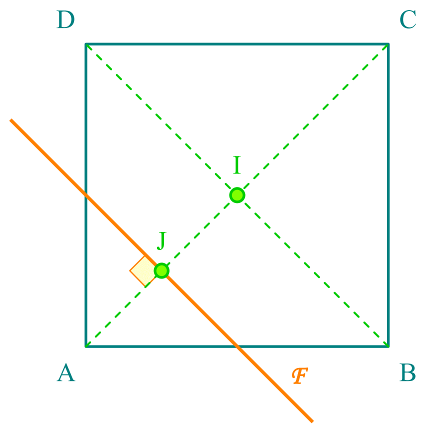
$$M \in \mathcal{E} \iff \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\| = AB \iff \left\|2.\overrightarrow{MI}\right\| = AB$$

$$\iff 2\times MI = AB \iff IM = \frac{AB}{2}$$

$\iff$ M appartient au centre de centre I et de rayon un demi-côté du carré.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ représenté ci-dessous est le cercle inscrit dans le carré ABCD.





4°) L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(2.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

est :

- **a.** la médiatrice du segment [AC].
- **b.** le cercle circonscrit au carré ABCD.
- **c.** la médiatrice du segment [AI].
- **d.** le cercle inscrit dans le carré ABCD.

Pour plus de commodités, appelons $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M en question.

Etant le milieu de la diagonale [BD], I est l'isobarycentre des points $(B;1)$ et $(D;1)$.

J étant le milieu de [AI], il est l'isobarycentre des points $(A;2)$ et $(I;2)$.

En vertu de la règle dite d'associativité :

Le barycentre des points $(A;2)$ $\underbrace{(B;1)\quad(D;1)}_{\downarrow}$

est aussi le barycentre des points $(A;2)$ $(I;1+1=2)$

Donc J est le barycentre des trois points pondérés $(A;2)$, $(B;1)$ et $(D;1)$.

En application du théorème de réduction des sommes vectorielles, il vient alors que pour tout point M du plan :

$$2.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD} = \overbrace{\underbrace{2.\overrightarrow{MJ}+2.\overrightarrow{JA}}_{2.\overrightarrow{MA}}+\underbrace{\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}}_{\overrightarrow{MC}}+\underbrace{\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD}}_{\overrightarrow{MD}} = 4.\overrightarrow{MJ}+\underbrace{2.\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}}_{\substack{=\vec{o}\\ \text{J est le barycentre de}\\ (A;2),\ (B;1)\text{ et }(D;1).}}}^{\text{C'est la démonstration du théorème de réduction vectorielle...}} = 4.\overrightarrow{MJ}$$

Quant à la différence $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}$. Elle se simplifie aussi !

Au final, l'égalité définissant l'appartenance d'un point à l'ensemble $\mathcal{F}$ a bien évolué !

$$M \in \mathcal{F} \iff \underbrace{\left(2.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)}_{4.\overrightarrow{MJ}}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)}_{\overrightarrow{CA}}=0 \iff \underbrace{\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{CA}=0}_{\text{Après division par 4.}}$$

$\iff$ Les vecteurs $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux

$\iff$ $\underbrace{\text{M appartient à la perpendiculaire à la droite (AC) passant par J.}}_{\text{C'est la médiatrice du segment [AI].}}$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{F}$ représenté ci-contre est la médiatrice du segment [AI].