On considère la suite numérique (J_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \times \sqrt{1+t}.dt$$

1°) Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

Intéressons-nous au signe de la différence de deux termes consécutifs de la suite (J_n).
Pour tout entier naturel non nul n, nous pouvons écrire :

$$J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} e^{-t} \times \sqrt{1+t}.dt - \int_1^{n} e^{-t} \times \sqrt{1+t}.dt$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_1^{n} e^{-t} \times \sqrt{1+t}.dt} + \int_n^{n+1} e^{-t} \times \sqrt{1+t}.dt}_{\text{C'est la relation de Chasles qui s'applique...}} - \cancel{\int_1^{n} e^{-t} \times \sqrt{1+t}.dt} = \int_n^{n+1} e^{-t} \times \sqrt{1+t}.dt$$

Comme ses facteurs e^{-t} et $\sqrt{1+t}$ sont positifs sur l'intervalle $[n;n+1]$, alors il en va de même pour le produit $\varphi(t) = e^{-t} \times \sqrt{1+t}$.

Par conséquent, l'intégrale $\int_n^{n+1} \varphi(t).dt$ est aussi positive.

Positivité de l'intégrale : *L'intégrale d'une fonction positive est aussi positive.*

Conclusion : comme la différence des deux termes consécutifs $J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} \varphi(t).dt$ est toujours positive, alors la suite (J_n) est strictement croissante.

2. On définit la suite (I_n) pour tout entier naturel non nul n par :

$$I_n = \int_1^n (t+1) \times e^{-t}.dt$$

2.a) Justifier que pour tout réel $t \geq 1$, on a : $\sqrt{t+1} \leq t+1$.

Pour prouver qu'un nombre est plus grand qu'un autre, on peut établir que la différence des deux est positive. C'est l'application de l'équivalence : $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

D'abord comme la somme $t+1$ est positive sur $[1;+\infty[$, alors celle-ci y a une racine et sur cet intervalle, nous avons l'égalité :

$$t+1 = \left(\sqrt{t+1}\right)^2$$

Intéressons-nous à la différence de deux membres de l'inégalité à établir.
Pour tout réel $t \geq 1$, nous pouvons écrire :

$$(t+1) - \sqrt{t+1} = \left(\sqrt{t+1}\right)^2 - \sqrt{t+1} = \sqrt{t+1} \times \left(\sqrt{t+1} - 1\right)$$

Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la racine $\sqrt{t+1}$ est positive ou nulle. Quid de l'autre facteur ?

$$t \in [1;+\infty[\Leftrightarrow t \geq 1 \Rightarrow t+1 \geq 2 > 1 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{t+1} > \sqrt{1} = 1}_{\substack{\text{La fonction racine} \\ \text{est croissante} \\ \text{sur } [0;+\infty[}} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{t+1} - 1 > 0}_{\substack{\text{Le second facteur} \\ \text{est positif sur } [1;+\infty[.}}$$

Une fonction croissante conserve l'ordre.

Conclusion : comme la différence $(t+1) - \sqrt{t+1}$ est le produit de deux facteurs positifs, alors elle est positive sur l'intervalle $[1;+\infty[$. Par conséquent, pour tout réel $t \in [1;+\infty[$:

$$(t+1) - \sqrt{t+1} \geq 0 \Leftrightarrow t+1 \geq \sqrt{t+1}$$

2.b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $J_n \leq I_n$

Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1.
L'inégalité $\sqrt{t+1} \leq t+1$ étant vraie sur l'intervalle $[1;+\infty[$, elle l'est de facto sur $[1;n]$.
Pour tout $t \in [1;n]$, nous pouvons alors écrire :

$$\sqrt{t+1} \leq t+1 \quad \underset{\div e^{-t}}{\overset{\times e^{-t}}{\Leftrightarrow}} \quad \underbrace{e^{-t} \times \sqrt{t+1} \leq e^{-t} \times (t+1)}$$

Comme on multiplie les deux membres de l'inégalité par l'exponentielle e^{-t} qui est une quantité positive, alors l'ordre ne change pas.

Les deux fonctions $e^{-t} \times \sqrt{1+t}$ et $e^{-t} \times (t+1)$ intervenant dans cette inégalité étant continues sur l'intervalle $[1;n]$, nous pouvons donc intégrer l'inégalité sur $[1;n]$.
L'intégration sur l'intervalle $[1;n]$ conservant l'ordre, il vient alors :

$$\int_1^n e^{-t} \times \sqrt{1+t}.dt \leq \int_1^n (t+1) \times e^{-t}.dt \quad \text{soit} \quad J_n \leq I_n$$

2.c) Calculer I_n en fonction de n.
En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel indépendant de n.

Soit n un entier naturel non nul.
Pour exprimer l'intégrale I_n en fonction de n, nous allons utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\underbrace{\int_1^n \mathrm{u}(\mathrm{t})\times \mathrm{v}'(\mathrm{t}).\mathrm{dt} = \left[\mathrm{u}(\mathrm{t})\times \mathrm{v}(\mathrm{t})\right]_1^n - \int_1^n \mathrm{u}'(\mathrm{t})\times \mathrm{v}(\mathrm{t}).\mathrm{dt}}_{\text{Formule d'intégration par parties}}$$

où les fonctions $\left|\begin{array}{l}\mathrm{u}(\mathrm{t}) = \mathrm{t}+1 \\ \mathrm{u}'(\mathrm{t}) = 1\end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l}\mathrm{v}(\mathrm{t}) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} \\ \mathrm{v}'(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\end{array}\right.$ sont deux fonctions dérivables et à dérivées continues sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $[1;n]$.

$$\mathrm{I}_n = \int_1^n \underbrace{(\mathrm{t}+1)}_{\mathrm{u}}\times \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}}_{\mathrm{v}'}.\mathrm{dt} = \left[(\mathrm{t}+1)\times\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\right)\right]_1^n - \int_1^n \underbrace{1}_{\mathrm{u}'}\times \underbrace{\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\right)}_{\mathrm{v}}.\mathrm{dt}$$

$$= -(n+1)\times \mathrm{e}^{-n} + 2\times \mathrm{e}^{-1} + \int_1^n \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}.\mathrm{dt} = \frac{2}{\mathrm{e}} - (n+1)\times \mathrm{e}^{-n} + \left[-\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\right]_1^n$$

$$= \frac{2}{\mathrm{e}} - (n+1)\times \mathrm{e}^{-n} + \left(-\mathrm{e}^{-n}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-1}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}} - (n+1)\times \mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$= \frac{3}{\mathrm{e}} - (n+2)\times \mathrm{e}^{-n}$$

Comme la somme $n+2$ et l'exponentielle e^{-n} sont toujours positifs, alors il en va de même pour leur produit $(n+2)\times \mathrm{e}^{-n}$. Par conséquent, pour tout entier naturel non nul n, il vient :

$$\mathrm{J}_n \leq \mathrm{I}_n = \frac{3}{\mathrm{e}} - (n+2)\times \mathrm{e}^{-n} \leq \frac{3}{\mathrm{e}}$$

<u>Conclusion :</u> la suite (J_n) est majorée par le réel $\frac{3}{\mathrm{e}}$.

2.d) Que peut-on en conclure quant à la suite (J_n) ?

Comme la suite (J_n) est strictement croissante et est majorée par $\frac{3}{\mathrm{e}}$, alors elle est convergente. Par contre, rien ne permet pour l'instant de connaître sa limite.