Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère le point I d'affixe ***i*** et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3}+2\boldsymbol{i}$.

1.a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.
Sur une figure, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

Calculons la distance IA :

$$IA = |z_A - z_I| = |\sqrt{3}+2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}| = |\sqrt{3}+\boldsymbol{i}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Donc le point A appartient au cercle Γ de centre I et de rayon 2.
Le point A est l'un des deux points d'intersection du cercle Γ et de la droite horizontale d'équation $y = 2$. C'est ainsi qu'il se construit !

1.b. On considère la rotation ***r*** de centre le point I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B, image du point A par la rotation ***r***, a pour affixe :

$$z_B = -1+\boldsymbol{i}.\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

Comme le point B est l'image de A par la rotation ***r*** de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors les affixes de tout ce petit monde vérifient l'égalité complexe :

$$z_B - z_I = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} \times (z_A - z_I) \quad \Leftrightarrow \quad z_B - \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\times\left(\sqrt{3}+2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}\right) \quad \Leftrightarrow \quad z_B - \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\times\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad z_B = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}\sqrt{3}-1 = -1+\boldsymbol{i}.\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Pour ce qui est de l'appartenance du point B au cercle Γ, nous pouvons écrire :

$$IB = |z_B - z_I| = |\boldsymbol{i}\times(z_A - z_I)| = |\boldsymbol{i}|\times|z_A - z_I| = 1\times 2 = 2$$

Donc le point B appartient lui aussi au cercle Γ de centre I et de rayon 2.
Plus simplement, nous aurions pu nous contenter d'écrire que B qui est l'image de A par la rotation ***r*** est sur l'orbite de A, c'est-à-dire sur le centre de centre I passant par A.

c. Calculer l'affixe du point C symétrique de A par rapport au point I.

Comme C est le symétrique de A par rapport à I, alors I est le milieu du segment [AC].
Les affixes de ces trois points vérifient l'égalité :

$$\frac{z_A+z_C}{2} = z_I \quad \Leftrightarrow \quad z_A + z_C = 2\times z_I$$
$$\Leftrightarrow \quad z_C = 2\times z_I - z_A = 2\boldsymbol{i} - \left(\sqrt{3}+2\boldsymbol{i}\right) = -\sqrt{3}$$

d. Quelle est la nature du triangle (ABC) ? Justifier.

Le triangle ABC semble isocèle et rectangle en B. Pour le prouver de manière complexe, intéressons-nous au quotient complexe :

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-\sqrt{3}-\left(-1+\boldsymbol{i}.\left(\sqrt{3}+1\right)\right)}{\left(\sqrt{3}+2\boldsymbol{i}\right)-\left(-1+\boldsymbol{i}.\left(\sqrt{3}+1\right)\right)} = \frac{-\sqrt{3}+1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}-\boldsymbol{i}}{\sqrt{3}+2\boldsymbol{i}+1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}-\boldsymbol{i}}$$

Il faut vraiment aimer les calculs...

$$= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)-\boldsymbol{i}\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)+\boldsymbol{i}.\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{\left[\left(1-\sqrt{3}\right)-\boldsymbol{i}\left(1+\sqrt{3}\right)\right]\times\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-\boldsymbol{i}.\left(1-\sqrt{3}\right)\right]}{\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\boldsymbol{i}.\left(1-\sqrt{3}\right)\right]\times\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-\boldsymbol{i}.\left(1-\sqrt{3}\right)\right]}$$

$$= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\left(1+\sqrt{3}\right)-\boldsymbol{i}\times\left(1-\sqrt{3}\right)^2-\boldsymbol{i}\times\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\boldsymbol{i}^2\times\left(1-\sqrt{3}\right)\times\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\boldsymbol{i}^2\times\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{\left[1^2-\sqrt{3}^2\right]-\boldsymbol{i}\times\left[1-2\sqrt{3}+3\right]-\boldsymbol{i}\times\left[1+2\sqrt{3}+3\right]+(-1)\times\left[1^2-\sqrt{3}^2\right]}{\left[1+2\sqrt{3}+3\right]+\left[1-2\sqrt{3}+3\right]}$$

$$= \frac{-\boldsymbol{i}\times\left(4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}\right)}{8} = \frac{-\boldsymbol{i}\times 8}{8} = -\boldsymbol{i}$$

Analysons géométriquement le résultat de ce quotient :

Comme $\frac{BC}{BA} = \left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = |-\boldsymbol{i}| = 1$, alors le triangle ABC est isocèle en B.

Comme $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(-\boldsymbol{i}) = -\frac{\pi}{2}$, alors ABC est rectangle en B.

Conclusion : le triangle ABC est isocèle rectangle en B.

Une autre manière pour établir la rectitude isocèle du triangle ABC
Comme le point B appartient au cercle Γ dont l'un des diamètres est le segment [AC], alors le triangle ABC est rectangle à B.

Ensuite, comme, du fait de la rotation ***r***, une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)$ est $\frac{\pi}{2}$, alors la droite (IB) coupe perpendiculairement le segment [AC] en son milieu I.
Donc la droite (IB) est la médiatrice du segment [AC], c'est-à-dire l'ensemble des points du plan équidistants de A et C.
Le point B appartenant à cette droite, nous en déduisons :

BA = BC

Conclusion : le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

2. On considère les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$$

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration

Les droites (BF) et (CE) semblent perpendiculaires. Pour le prouver, nous allons d'abord déterminer les affixes des points E et F.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow z_E - z_A = z_B - z_I$$

$$\Leftrightarrow z_E = z_B - z_I + z_A = -1 + \boldsymbol{i}\left(\sqrt{3}+1\right) - \boldsymbol{i} + \left(\sqrt{3}+2\boldsymbol{i}\right) = \left(\sqrt{3}-1\right) + \boldsymbol{i}.\left(\sqrt{3}+2\right)$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow z_F - z_A = z_I - z_B$$

$$\Leftrightarrow z_F = z_I - z_B + z_A = \boldsymbol{i} + 1 - \boldsymbol{i}\left(\sqrt{3}+1\right) + \sqrt{3} + 2\boldsymbol{i} = \left(\sqrt{3}+1\right) + \boldsymbol{i}.\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Deux voies permettent de prouver que les droites (BF) et (CE) sont perpendiculaires :

➔ ***On peut recourir au produit scalaire...***

Calculons le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CE}$ dont les affixes sont :

$$z_{\overrightarrow{BF}} = z_F - z_B = \left(\sqrt{3}+1\right) + \boldsymbol{i}.\left(2-\sqrt{3}\right) + 1 - \boldsymbol{i}\left(\sqrt{3}+1\right) = \left(\sqrt{3}+2\right) + \boldsymbol{i}.\left(1-2\sqrt{3}\right)$$

$$z_{\overrightarrow{CE}} = z_E - z_C = \left(\sqrt{3}-1\right) + \boldsymbol{i}.\left(\sqrt{3}+2\right) + \sqrt{3} = \left(2.\sqrt{3}-1\right) + \boldsymbol{i}.\left(\sqrt{3}+2\right)$$

Il vient alors :

$$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CE} = \left(\sqrt{3}+2\right)\times\left(2\sqrt{3}-1\right) + \left(1-2\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3}+2\right)$$

$$= 6 - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 2 - 6 - 4\sqrt{3} = 0$$

Comme leur produit scalaire est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux.
Conclusion : les droites (BF) et (CE) sont perpendiculaires.

➔ ***On peut aussi utiliser la rotation r qui fait pivoter tout vecteur de son angle...***

L'image du point B par la rotation ***r*** semble être le point C. Prouvons le !

Si on appelle B′ l'image de B par la rotation ***r*** de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors, comme lors de la question **1.b**, les affixes de ces points vérifient :

C'est pourtant un peu évident...

$$z_{B'} - z_I = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(z_B - z_I\right) \Leftrightarrow z_{B'} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}\times\left[-1 + \boldsymbol{i}\left(\sqrt{3}+1\right) - \boldsymbol{i}\right]$$

$$= \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}\times\left[-1 + \boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right] = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{i} - \sqrt{3} = -\sqrt{3} = z_C$$

Donc l'image du point B par la rotation ***r*** est bien le point C.

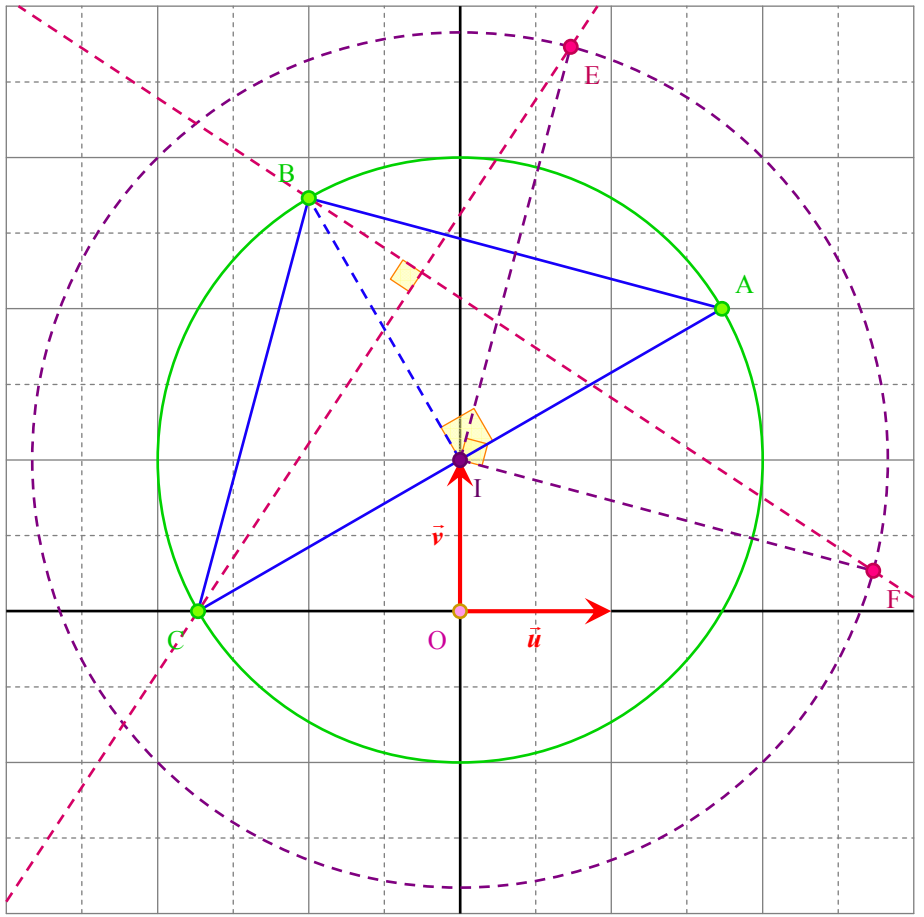
Plus simplement, nous aurions pu dire que C appartenait au cercle de centre I passant par A et B et, que pour l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right) = \left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}\right) - \left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

L'image F′ de F par la rotation ***r*** semble être le point E. Etablissons-le !
Les affixes de ces deux premiers points vérifient l'égalité :

$$z_{F'} - z_I = \boldsymbol{i}\times\left(z_F - z_I\right) \Leftrightarrow z_{F'} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}\times\left[\left(\sqrt{3}+1\right) + \boldsymbol{i}.\left(2-\sqrt{3}\right) - \boldsymbol{i}\right]$$

$$= \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}\times\left[\sqrt{3}+1+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right]$$

$$= \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}\sqrt{3} + \boldsymbol{i} - 1 + \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right) + \boldsymbol{i}.\left(\sqrt{3}+2\right) = z_E$$

C'est bien le cas !

Finalement, comme $\begin{cases} \boldsymbol{r}(B) = C \\ \boldsymbol{r}(F) = E \end{cases}$, alors une mesure l'angle orienté $\underbrace{\left(\overrightarrow{BF},\overrightarrow{CE}\right)}_{(\text{Points,Images})}$ est égale à l'angle de la rotation ***r***, soit $\frac{\pi}{2}$. Donc les droites (BF) et (CE) sont perpendiculaires.