f est une fonction définie et dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ dont le tableau de variation est :

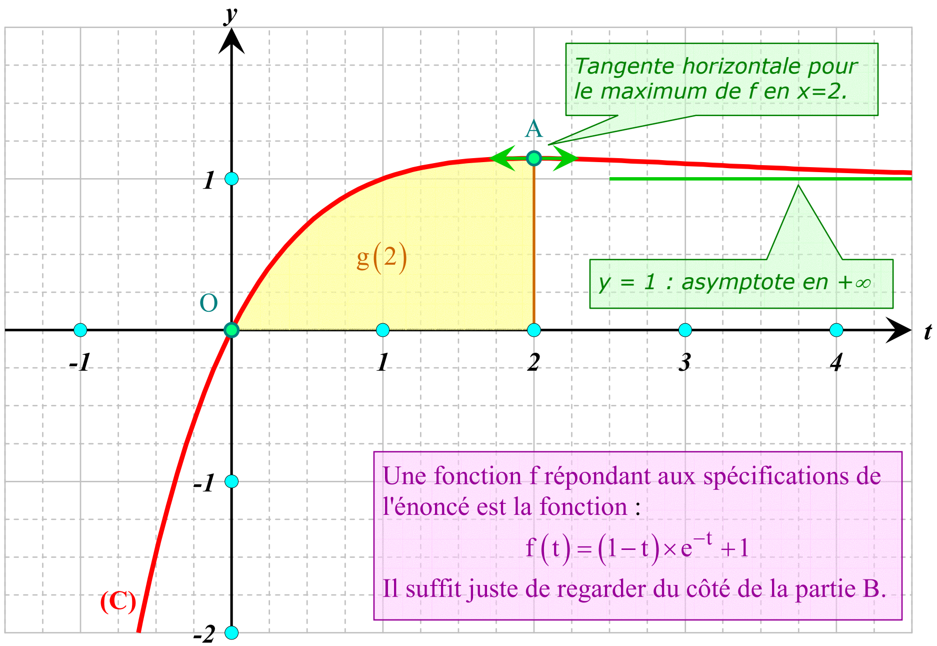
t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	$-$
f	$-\infty$		0		$1+e^{-2}$		1

Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x)=\int_0^x f(t).dt$$

Partie A - A propos d'une fonction f en général

1°) En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer dans le repère ci-dessous une courbe (C) susceptible de représenter la fonction f.



2.a) Interpréter graphiquement $g(2)$.

2.b) Montrer que $0 \le g(2) \le 2,5$

2.a) L'intégrale $g(2)=\int_0^2 f(t).dt$ est l'aire du domaine compris l'axe des abscisses, la courbe (C) et la droite verticale d'équation $x=2$. Ce domaine est représenté ci-contre.

2.b) D'après le tableau de variation de f, nous avons pour tout réel $t\in[0;2]$:

$$0\le f(t)\le 1+e^{-2}$$

Appliquons à cette inégalité le théorème de l'inégalité de la moyenne. Il vient :

$$0\times(2-0)\le\int_0^2 f(t).dt\le\left(1+e^{-2}\right)\times(2-0) \quad \text{soit} \quad 0\le g(2)\le 2\times\left(1+e^{-2}\right)$$

Or, le nombre (d'Euler) e est compris entre 2 et 3. Par conséquent :

$$2<e<3 \Rightarrow \underbrace{4<e^2<9}_{\text{La fonction carré est croissante sur }]0;+\infty[.} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{4}>\frac{1}{e^2}=e^{-2}>\frac{1}{9}}_{\text{La fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[.} \Rightarrow \underbrace{2\times\left(1+\frac{1}{4}\right)}_{2,5}>2\times\left(1+e^{-2}\right)$$

<u>Conclusion :</u> en combinant les deux inégalités, nous aboutissons à : $0\le g(2)\le 2,5$

3.a) Soit x un réel supérieur ou égal à 2.

Montrer que $\int_2^x f(t).dt\ge x-2$. En déduire que $g(x)\ge x-2$.

3.b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3.a) D'après le tableau de variation de f, nous savons que pour tout réel $t\in[2;+\infty[$:

$$f(t)\ge 1$$

Intégrons cette inégalité sur l'intervalle $[2;x]$ où x est un réel supérieur ou égal à 2.

$$\int_2^x f(t).dt\ge\int_2^x 1\times dt=[t]_2^x=x-2$$

Il vient alors que pour tout réel $x\in[2;+\infty[$:

$$g(x)=\underbrace{\int_0^x f(t).dt=\int_0^2 f(t).dt+\int_2^x f(t).dt}_{\text{C'est la relation de Chasles.}}$$

Comme la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;2]$, alors l'intégrale $\int_0^2 f(t).dt$ est aussi positive. On en déduit alors :

$$g(x) = \int_0^2 f(t).dt + \int_2^x f(t).dt \geq 0 + (x-2) = x-2$$

3.b) Comme la fonction g est minorée sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par la fonction $x-2$ qui tend vers $+\infty$, alors il en va de même pour g en $+\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

4°) Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

Comme la fonction g est une primitive de la fonction f sur $]-\infty;+\infty[$, alors la dérivée de la fonction g sur $]-\infty;+\infty[$ est la fonction f qui d'après son tableau de variation, est négative avant 0 et positive après. Par conséquent, le tableau de variation de g est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$	
g	?	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Nous ignorons la limite de g en $-\infty$ *[en fait, g(x) s'envole alors vers $+\infty$]*. Par contre, l'image de 0 par g se calcule très bien.

$$g(x) = \underbrace{\int_0^0 f(t).dt}_{\text{Bornes égales}} = 0$$

Partie B - A propos d'une fonction f en particulier

Dans cette partie, la fonction f est définie pour tout réel t par :

$$f(t) = (t-1)\times e^{-t} + 1$$

1°) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale :

$$\int_0^x (t-1)\times e^{-t}.dt$$

Pour calculer l'intégrale $\int_0^x (t-1)\times e^{-t}.dt$, appliquons la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^x u(t)\times v'(t).dt = \left[u(t)\times v(t)\right]_0^x - \int_0^x u'(t)\times v(t).dt$$

où les fonctions $\begin{vmatrix} u(t) = t-1 \\ u'(t) = 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} v(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = e^{-t} \end{vmatrix}$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons écrire que pour tout réel x :

$$\int_0^x (t-1)\times e^{-t}.dt = \left[(t-1)\times\left(-e^{-t}\right)\right]_0^x - \int_0^x 1\times\left(-e^{-t}\right).dt$$

$$= \underbrace{\left((x-1)\times\left(-e^{-x}\right)\right) - \left((-1)\times\left(-e^{0}\right)\right)} - \int_0^x \left(-e^{-t}\right).dt$$

$$= -x\times e^{-x} + e^{-x} - 1 - \left[e^{-t}\right]_0^x = -x\times e^{-x} + \cancel{e^{-x}} - \cancel{1} - \cancel{e^{-x}} + \cancel{1}$$

$$= -x\times e^{-x}$$

2°) En déduire que pour tout réel x :

$$g(x) = x\times\left(1-e^{-x}\right)$$

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g(x) = \int_0^x f(t).dt = \underbrace{\int_0^x \left((t-1)\times e^{-t}+1\right).dt = \int_0^x (t-1)\times e^{-t}.dt + \int_0^x 1.dt}_{\text{Linéarité de l'intégrale}}$$

$$= -x\times e^{-x} + [t]_0^x = -x\times e^{-x} + x - 0 = x - x\times e^{-x} = x\times\left(1-e^{-x}\right)$$

3°) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$

Lorsque x plonge vers $-\infty$, son opposé $-x$ s'envole vers $+\infty$ et son exponentielle e^{-x} aussi !

Par conséquent :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x\times\left(1-e^{-x}\right) = (-\infty)\times\left(1-(+\infty)\right) = (-\infty)\times(-\infty) = +\infty$$