Cet exercice est constitué de deux parties relativement indépendantes.

Partie A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2}$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

Calculons l'image de z_0 par le polynôme P.

$$\begin{aligned} P(z_0) &= \left(i\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+i\sqrt{2}\right)\times\left(i\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\times\left(i\sqrt{2}\right) - 2i\sqrt{2} \\ &= -i\times 2\sqrt{2} - \left(2+i\sqrt{2}\right)\times(-1)\times 2 + 2i\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} \\ &= \cancel{-2i\sqrt{2}} + \cancel{4} + \cancel{2i\sqrt{2}} + \cancel{2i\sqrt{2}} - \cancel{4} - \cancel{2i\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

Donc le complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est l'une des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2.a. Déterminer deux réels a et b tels que $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\times\left(z^2 + az + b\right)$

La première chose à dire est que comme $i\sqrt{2}$ est une racine du polynôme P, alors ce dernier est factorisable par le facteur $z - i\sqrt{2}$.
Ensuite, on veut écrire (factoriser) le polynôme P sous la forme :

$$\begin{aligned} P(z) &= \left(z - i\sqrt{2}\right)\times\left(z^2 + az + b\right) \\ &= z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - i\sqrt{2}az - i\sqrt{2}b \end{aligned}$$

$$z^3 + \boxed{\left(-2 - i\sqrt{2}\right)}z^2 + \boxed{\left(2 + 2i\sqrt{2}\right)}z - \boxed{2i\sqrt{2}} = z^3 + \boxed{\left(a - i\sqrt{2}\right)}z^2 + \boxed{\left(b - i\sqrt{2}a\right)}z - \boxed{i\sqrt{2}b}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux. Il vient alors :

Egalité...

...des coefficients en z^2 : $-2 - \cancel{i\sqrt{2}} = a - \cancel{i\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = -2$

...des coefficients en z : $2 + 2i\sqrt{2} = b - i\sqrt{2}a \Leftrightarrow 2 + \cancel{2i\sqrt{2}} = b + \cancel{2i\sqrt{2}}$

...des coefficients constants : $-2\cancel{i\sqrt{2}} = -\cancel{i\sqrt{2}}b \Leftrightarrow b = 2$

Nous en déduisons que la forme factorisée du polynôme P est :

$$P(z) = z^3 - \left(2+i\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1+i\sqrt{2}\right)z - 2i\sqrt{2} = \left(z - i\sqrt{2}\right)\times\left(z^2 - 2z + 2\right)$$

2.b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\left(z - i\sqrt{2}\right)\times\left(z^2 - 2z + 2\right) = 0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{z - i\sqrt{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{z^2 - 2z + 2 = 0}_{\text{A résoudre séparément...}}}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$z = i\sqrt{2}$$

Calculons le discriminant de cette dernière sous-équation qui est du second degré :

$$\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 2 = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$

Comme son discriminant est négatif, alors l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet deux solutions complexes, non réelles et conjuguées :

$$z = \frac{-(-2) - 2i}{2\times 1} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \quad \text{ou} \quad z = \frac{-(-2) + 2i}{2\times 1} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

Conclusion : l'équation $P(z) = 0$ admet trois solutions : $i\sqrt{2}$ $\quad 1 - i \quad 1 + i$

Partie A

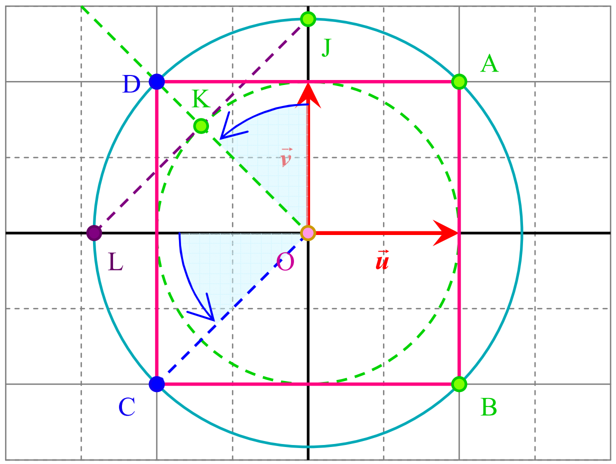
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra deux centimètres pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \qquad z_B = 1 - i \qquad z_J = i\sqrt{2} \qquad z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

1. Placer les points A, B, J et K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

Le point J est l'intersection du cercle de centre O passant par A et de l'axe $\left(O; \vec{v}\right)$.

Le point K est l'intersection du cercle trigonométrique et de la demi-droite radiale [OD).



2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K.
Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

Comme L est le symétrique de J par rapport à K, alors K est le milieu de [JL].
Par conséquent, les affixes de ces points vérifient la relation complexe :

$$z_K = \frac{z_J + z_L}{2} \iff 2z_K = z_J + z_L \iff z_L = 2z_K - z_J$$
$$= 2\times\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] - \boldsymbol{i}\sqrt{2}$$
$$= \cancel{2}\times\left[-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right] - \boldsymbol{i}\sqrt{2}$$
$$= -\sqrt{2} + \cancel{\boldsymbol{i}\sqrt{2}} - \cancel{\boldsymbol{i}\sqrt{2}} = \underline{-\sqrt{2}}$$

3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

D'après la figure, les quatre points en question semblent appartenir à un même cercle de centre O. Voyons ce qu'il en est en calculant les longueurs suivantes :

$$\text{OA} = |z_A - z_O| = |1+\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \underline{\sqrt{2}}$$
$$\text{OB} = |z_B - z_O| = |1-\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \underline{\sqrt{2}}$$
$$\text{OJ} = |z_J - z_O| = |\boldsymbol{i}\sqrt{2}| = |\boldsymbol{i}|\times|\sqrt{2}| = 1\times\sqrt{2} = \underline{\sqrt{2}}$$
$$\text{OL} = |z_L - z_O| = |-\sqrt{2}| = \underline{\sqrt{2}}$$

Donc les quatre points A, B, J et L appartiennent au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

Soit D le point d'affixe $z_D = -1+\boldsymbol{i}$. La rotation $\boldsymbol{r}$ de centre O transforme J en D.

4.a. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation $\boldsymbol{r}$.

Comme le point D est l'image du point J par la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre O, alors une mesure de l'angle de la rotation $\boldsymbol{r}$ est :

$$\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_O}{z_J - z_O}\right) = \arg\left(\frac{-1+\boldsymbol{i}}{-\sqrt{2}}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \boldsymbol{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arg\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arg\left(e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}\right) = \underline{-\frac{\pi}{4}}$$

<u>Conclusion :</u> $\boldsymbol{r}$ est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

4.b. Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.

Comme C est l'image de L par la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre O, alors les affixes de ces trois points sont liées par la relation complexe :

$$z_C - z_O = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}\times(z_L - z_O) \iff z_C = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}\times z_L$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{2}{2} + \boldsymbol{i}\frac{2}{2} = \underline{-1+\boldsymbol{i}}$$

5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? On justifiera sa réponse.

Déjà, comme :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (1-\boldsymbol{i}) - (1+\boldsymbol{i}) = 1-\boldsymbol{i}-1-\boldsymbol{i} = \underline{-2\boldsymbol{i}}$$
$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = (-1-\boldsymbol{i}) - (-1+\boldsymbol{i}) = -1-\boldsymbol{i}+1-\boldsymbol{i} = \underline{-2\boldsymbol{i}}$$

alors, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. Donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
A présent, calculons les longueurs de deux de ses côtés consécutifs :

$$\text{AB} = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |-2\boldsymbol{i}| = \underline{2}$$
$$\text{AD} = |z_D - z_A| = |(1+\boldsymbol{i}) - (-1+\boldsymbol{i})| = |2| = \underline{2}$$

Ayant deux côtés consécutifs égaux, le parallélogramme ABCD est aussi au losange.
Enfin, calculons les longueurs de ses deux diagonales.

$$\text{AC} = |z_C - z_A| = |(-1-\boldsymbol{i}) - (1+\boldsymbol{i})| = |-2-2\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \underline{\sqrt{8}}$$
$$\text{BD} = |z_D - z_B| = |(-1+\boldsymbol{i}) - (1-\boldsymbol{i})| = |-2+2\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \underline{\sqrt{8}}$$

Ses diagonales étant égales, le parallélogramme ABCD est aussi un rectangle.
<u>Conclusion :</u> le quadrilatère ABCD est à la fois un losange et un rectangle, autrement dit c'est un carré.