Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère la similitude indirecte ***f*** d'écriture complexe :

$$z' = \left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\times\overline{z}$$

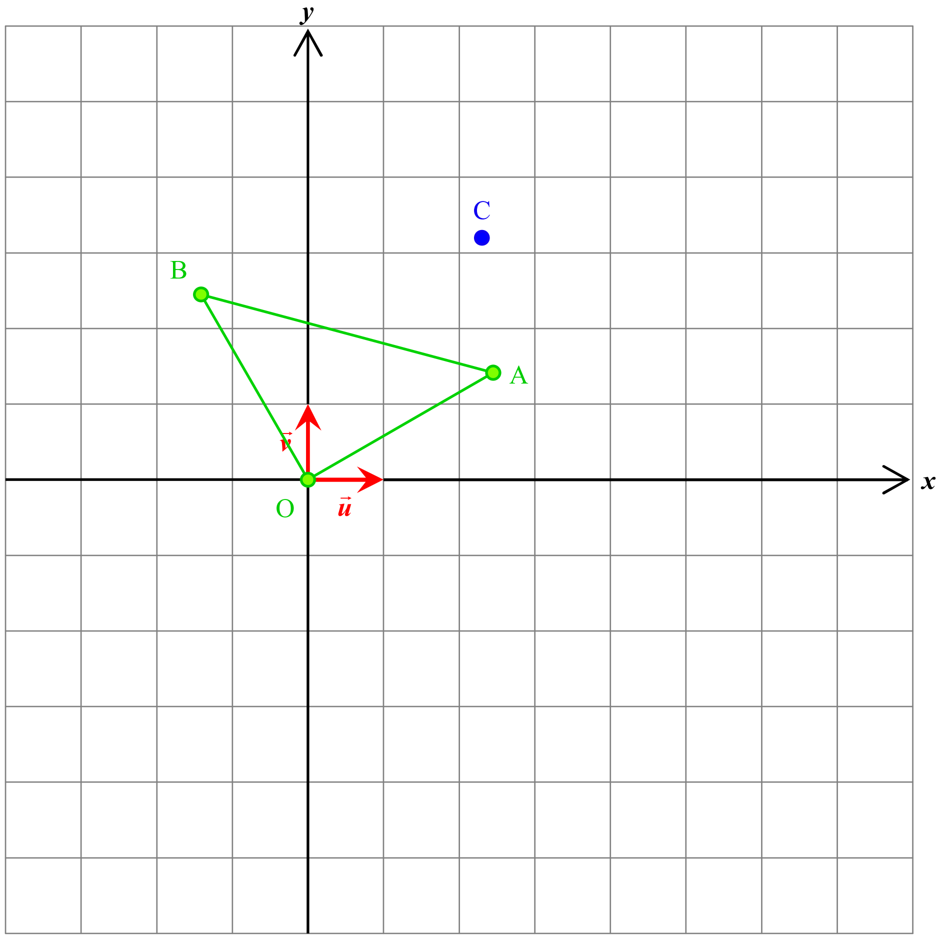
où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

Soient les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{6}+\boldsymbol{i}\sqrt{2} \qquad z_B = -\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\sqrt{6}$$

On note A' et B' les images respectives des points A et B par ***f***.

Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas sur la figure ci-dessous :



1.a. Ecrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.

Commençons par calculer les modules de ces deux affixes :

$$|z_A| = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

$$|z_B| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

Il vient alors :

$$z_A = 2\sqrt{2}\times\left[\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right] = 2\sqrt{2}\times\underbrace{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\boldsymbol{i}\frac{1}{2}\right]}_{\cos\theta+\boldsymbol{i}\sin\theta=e^{i\theta}} = \boxed{2\sqrt{2}\times e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}$$

$$z_B = 2\sqrt{2}\times\left[\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right] = 2\sqrt{2}\times\overbrace{\left[-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]}^{\cos\theta+\boldsymbol{i}\sin\theta=e^{i\theta}} = \boxed{2\sqrt{2}\times e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}}$$

1.b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle et direct.

Intéressons-nous au quotient :

Le quotient des exponentielles est l'exponentielle de la différence.

$$\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O} = \frac{z_B-0}{z_A-0} = \frac{\cancel{2\sqrt{2}}\times e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}}{\cancel{2\sqrt{2}}\times e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}} = \exp\left(\boldsymbol{i}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \exp\left(\boldsymbol{i}\left(\frac{4\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = e^{\boldsymbol{i}\frac{3\pi}{6}} = \boxed{e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}}$$

Exploitons ce quotient de manière géométrique. D'abord :

$$\frac{OB}{OA} = \left|\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right| = \left|e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}\right| = \boxed{1}$$

Donc le triangle OAB est isocèle en O. Ensuite :

$-\pi/2$ en aurait fait un triangle rectangle indirect.

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right) = \arg\left(e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}\ \text{modulo}\ 2\pi}$$

Donc le triangle OAB est rectangle direct en O.

1.c. En déduire la nature du triangle $OA'B'$.

Nous savons déjà que les images des points A et B par la similitude ***f*** sont les points A' et B'.

Calculons l'affixe de l'image O' du point O par ***f***.

$$z_{O'} = \boldsymbol{f}(z_O) = \left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\times\overline{z_O} = \left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\times\overline{0} = \left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\times 0 = 0 = \underline{z_O}$$

Donc le point O est sa propre image par ***f***. Autrement dit, O est un point fixe pour ***f***.

Ainsi, sachant que les points O, A et B ont pour images respectives O, A' et B' par la similitude indirecte ***f***, nous pouvons en déduire :

Comme une similitude conserve les rapports de longueurs, alors :

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{OB}{OA} = 1$$

Donc le triangle $OA'B'$ est isocèle en O.

Comme une similitude indirecte inverse l'orientation des angles, alors :

$$\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right) = -\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{modulo } 2\pi$$

Donc le triangle $OA'B'$ est rectangle mais indirect.

<u>Conclusion :</u> le triangle $OA'B'$ est isocèle rectangle indirect.

1.d. Montrer que l'affixe $z_{A'}$ de A' vérifie l'égalité :

$$z_{A'} = 2\times z_A$$

En déduire la construction des points A' et B'.

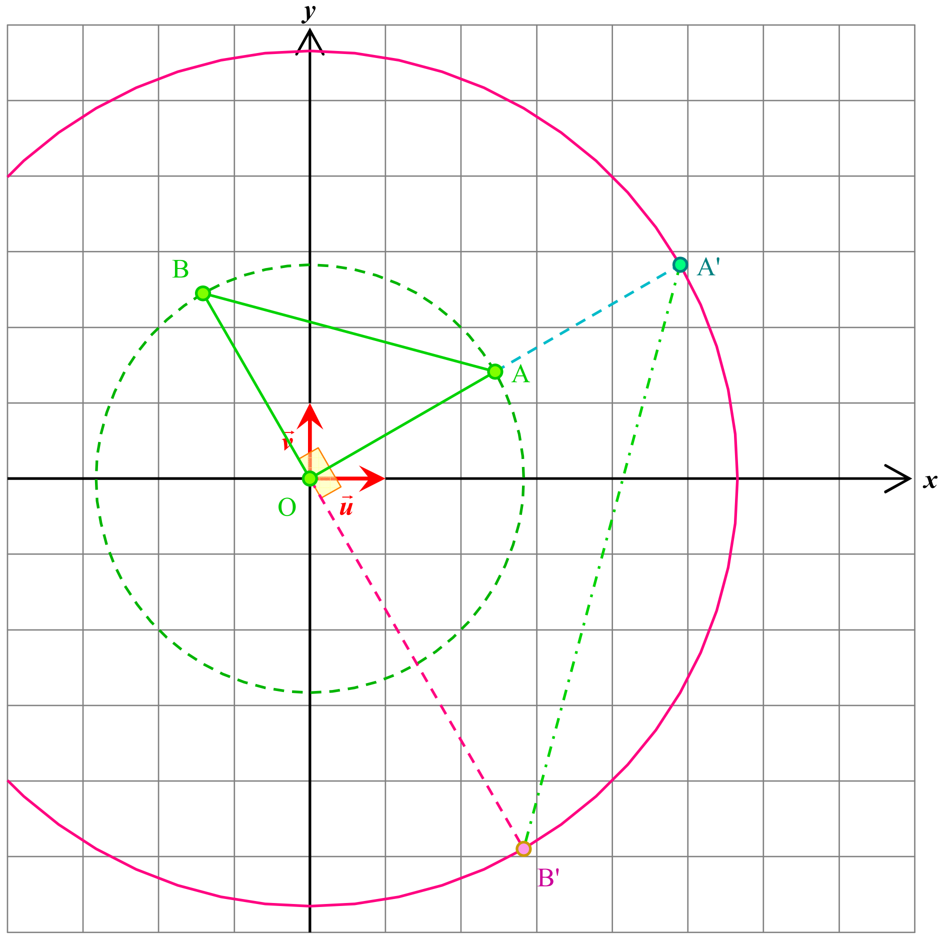
Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \boldsymbol{f}(z_A) = \left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\times\overline{z_A} \\ &= \left(1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{6}-\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right) \\ &= \sqrt{6}-\boldsymbol{i}\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\sqrt{18}-\boldsymbol{i}^2\times\sqrt{6} \\ &= \sqrt{6}-\boldsymbol{i}\sqrt{2}+\boldsymbol{i}\underbrace{\sqrt{9}}_{3}\times\sqrt{2}-(-1)\times\sqrt{6} = 2\sqrt{6}+2\boldsymbol{i}\sqrt{2} = 2\times\left(\sqrt{6}-\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right) = \underline{2\times z_A} \end{aligned}$$

Comme $z_{A'} = 2\times z_A \iff z_{A'} - z_O = 2\times\left(z_A - z_O\right)$, alors $\overrightarrow{OA'} = 2\times\overrightarrow{OA}$.

Donc le point A' est le symétrique de O par rapport à A.

Quant au point B', compte tenu de la question précédente, il est l'image du point A' par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. C'est ainsi que nous les construisons.



2. On note ***r*** la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et, ***s*** la symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{u})$.

On pose $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{s}$

2.a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation ***g***.

Si le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe *z* par la rotation ***r*** de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors les affixes de ces trois points sont liées par la relation :

$$z' - 0 = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\times(z-0) \iff \underline{z' = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\times z}$$

De même, si le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la réflexion $\boldsymbol{s}$ d'axe $(O;\vec{u})$, alors les affixes de ces deux points sont liées par l'égalité :

$$z' = \overline{z}$$

D'un point de vue fonctionnel, nous avons donc :

$$\boldsymbol{r}(z) = e^{i\frac{\pi}{3}} \times z \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{s}(z) = \overline{z}$$

Il vient alors que pour tour nombre complexe z :

$$\boldsymbol{g}(z) = \boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{s}(z) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{s}(z)) = e^{i\frac{\pi}{3}} \times \boldsymbol{s}(z) = e^{i\frac{\pi}{3}} \times \overline{z}$$

Conclusion : l'écriture complexe de la similitude (indirecte) $\boldsymbol{g}$ est :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} \times \overline{z} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times \overline{z}$$

2.b. Montrer que les points O et A sont invariants par la $\boldsymbol{g}$.

Calculons les affixes des images O'' et A'' des points O et A par $\boldsymbol{g}$.

$$z_{O''} = \boldsymbol{g}(z_O) = e^{i\frac{\pi}{3}} \times \overline{z_O} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 0 = 0 = z_O$$

$$z_{A''} = \boldsymbol{g}(z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}} \times \overline{z_A} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{18}}{2} - i^2.\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} + i\sqrt{2} = z_A$$

Conclusion : les points O et A sont leurs propres images par la similitude $\boldsymbol{g}$.

2.c. En déduire la nature de la transformation $\boldsymbol{g}$.

Comme la similitude $\boldsymbol{g}$ a deux points fixes (O et A) et, qu'elle n'est pas l'application identique du plan (vu son expression complexe qui n'est pas $z' = z$), alors $\boldsymbol{g}$ est une réflexion. Plus précisément, $\boldsymbol{g}$ est la symétrique d'axe (OA).

3.a. Montrer que l'on peut écrire $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{g}$ où $\boldsymbol{h}$ est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.

Ecrivons le coefficient directeur $1+i\sqrt{3}$ de $\boldsymbol{f}$ sous forme exponentielle.

D'abord, calculons son module :

$$\left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Il vient alors :

$$1+i\sqrt{3} = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2 \times e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Et concernant l'écriture de la similitude indirecte $\boldsymbol{f}$, nous pouvons écrire :

$$\boldsymbol{f}(z) = \left(1+i\sqrt{3}\right) \times \overline{z} = 2 \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times \overline{z} = 2 \times \boldsymbol{g}(z)$$

Or, l'homothétie de centre O et de rapport 2 a pour écriture complexe :

$$z' - 0 = 2 \times (z - 0) \quad \Leftrightarrow \quad z' = 2 \times z \qquad \textit{soit} \quad \boldsymbol{h}(z) = 2 \times z$$

Nous en déduisons :

$$\boldsymbol{f}(z) = 2 \times \boldsymbol{g}(z) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{g}(z)) = \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{g}(z)$$

Conclusion : la similitude indirecte $\boldsymbol{f}$ est la composée de la symétrie $\boldsymbol{g}$ d'axe (OA) suivie de l'homothétie $\boldsymbol{h}$ de centre O et de rapport 2.

3.b. Sur la figure, un point C a été placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation $\boldsymbol{f}$.

La construction de l'image C' se fait selon le processus de composition de $\boldsymbol{f}$:

$$C \xrightarrow{\text{Symétrie } \boldsymbol{g} \text{ d'axe (OA)}} C_1 \xrightarrow{\text{Homothétie } \boldsymbol{h} \text{ de centre O et de rapport 2}} C'$$