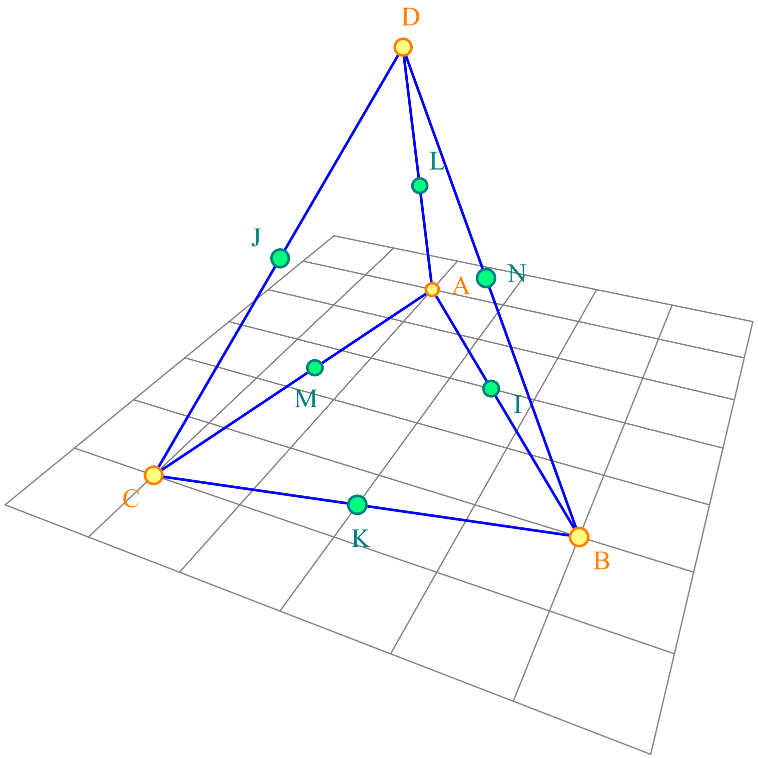
L'énoncé

On considère un tétraèdre ABCD. Dans celui-ci, les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].



On appelle G l'isobarycentre des quatre points A, B, C et D.

1°) Démontrer que les trois droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, le tétraèdre ABCD est supposé équifacial, c'est-à-dire que ses quatre faces sont des triangles isométriques tel que deux côtés non consécutifs soient égaux. Par conséquent, nous avons les égalités :

$$AB = CD \qquad BC = AD \qquad AC = BD$$

2.a) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Préciser également les natures des quadrilatères IMJN et KNLM.
2.b) En déduire que les droite (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra de même que les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales ainsi que (KL) et (MN).

3.a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).
3.b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{MK}$?
En déduire que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB).
Montrer de même que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (CD).
3.c) Montrer que le point G appartient aux plans médiateurs des segments [AB] et [CD].
3.d) Comment démontrerait-on que le point G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD ?
[Cette question est dite ouverte. C'est-à-dire qu'on ne s'attend pas à ce que le candidat élabore une démonstration mais seulement à ce qu'il ébauche une stratégie de résolution].

Le corrigé

1°) Nous allons prouver que le point G appartient aux trois droites (IJ), (KL) et (MN).
Pourquoi le point G appartient-il à la droite (IJ) ?
Le milieu I est l'isobarycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;1)$. Il vérifie l'égalité :

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{o}$$

De même, J étant l'isobarycentre des points pondérés $(C;1)$ et $(D;1)$, nous avons :

$$\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{o}$$

Enfin, comme G est l'isobarycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;1)$, $(C;1)$ et $(D;1)$, alors nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{o} \iff \underbrace{\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}}_{\overrightarrow{GA}}+\underbrace{\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}}_{\overrightarrow{GB}}+\underbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}}_{\overrightarrow{GC}}+\underbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JD}}_{\overrightarrow{GD}}=\vec{o}$$

Nonobstant, nous sommes en train de redémontrer le théorème d'associativité des barycentres.

$$\iff 2\times\overrightarrow{GI}+2\times\overrightarrow{GJ}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{=\vec{o}}+\underbrace{\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}}_{=\vec{o}}=\vec{o}$$

$$\iff 2\times\overrightarrow{GI}+2\times\overrightarrow{GJ}=\vec{o} \iff \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\vec{o}$$

Donc le point G est isobarycentre des points I et J, c'est-à-dire leur milieu.
L'essentiel pour nous est que nous savons désormais que le point G appartient à (IJ).
Pourquoi le point G appartient-il à la droite (KL) ?
Et bien pour les mêmes raisons qu'il appartient à la droite (IJ) ! Mais cette fois, nous allons être plus direct et utiliser ce théorème d'associativité des barycentres.
Le milieu K est l'isobarycentre des points $(B;1)$ et $(C;1)$.
Le milieu L est l'isobarycentre des points $(A;1)$ et $(D;1)$.
Par conséquent, l'isobarycentre G des quatre points $\underbrace{(B;1) \text{ et } (C;1)}_{\text{Barycentre K}}$ et $\underbrace{(A;1) \text{ et } (D;1)}_{\text{Barycentre L}}$ est aussi le barycentre des deux points pondérés $\underbrace{(K;1+1=2)}_{\text{Remplace }(B;1)\text{ et }(C;1)}$ et $\underbrace{(L;1+1=2)}_{\text{Remplace }(A;1)\text{ et }(D;1)}$.
Ainsi G est-il aussi l'isobarycentre des points $(K;2)$ et $(L;2)$, c'est-à-dire leur milieu.
Donc G appartient à la droite (KL).

Pourquoi le point G appartient-il à la droite (MN) ?

G étant le barycentre des points $\underbrace{(A;1) \text{ et } (C;1)}_{\text{Isobarycentre M}}$ et $\underbrace{(D;1) \text{ et } (D;1)}_{\text{Isobarycentre N}}$, il vient en application du théorème d'associativité qu'il est aussi l'isobarycentre des points $(M;2)$ et $(N;2)$.

Là encore G est le milieu de [MN], donc il appartient à la droite (MN).
Conclusion : comme le point G appartient aux trois droites (IJ), (KL) et (MN) qui sont distinctes (on l'admettra), alors elles sont concourantes en G.

2.a et b) Comme ses diagonales [IJ] et [LK] se croisent en leur milieu G, alors le quadrilatère (IKJL) est déjà un parallélogramme. Mais ce n'est pas tout !
En effet, comme les points J et L sont les milieux respectifs des côtés [DA] et [DC], alors en vertu du théorème des milieux appliqué dans le triangle DCA, nous avons :

$$JL = \frac{1}{2} \times AC$$

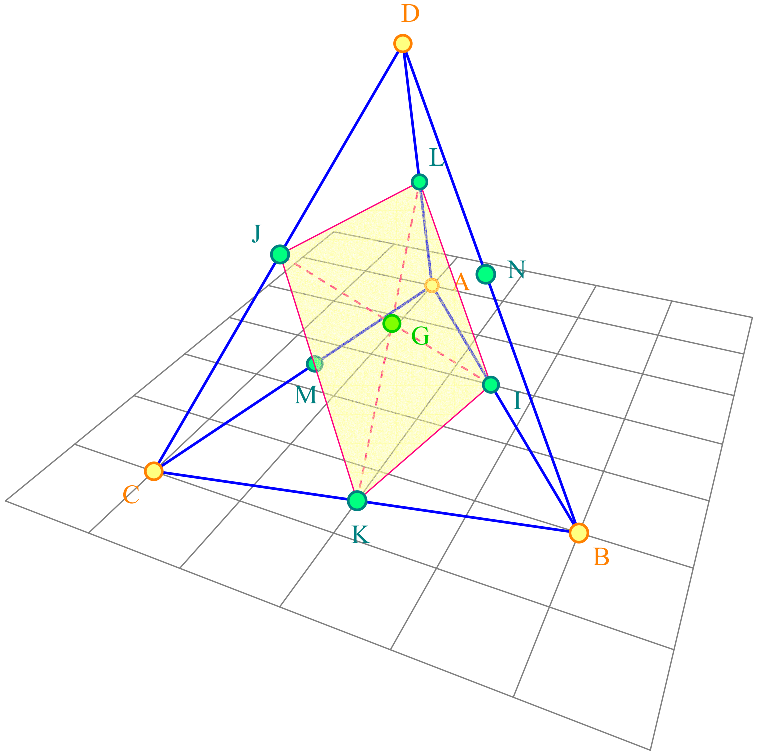
De même, J et K étant les milieux des côtés [CD] et [CB] dans le triangle CDB, alors :

$$JK = \frac{1}{2} \times DB$$

Or, les arêtes non consécutives [AC] et [DB] ont des longueurs égales. Par conséquent :

$$JL = \frac{1}{2} \times AC = \frac{1}{2} \times DB = JK$$

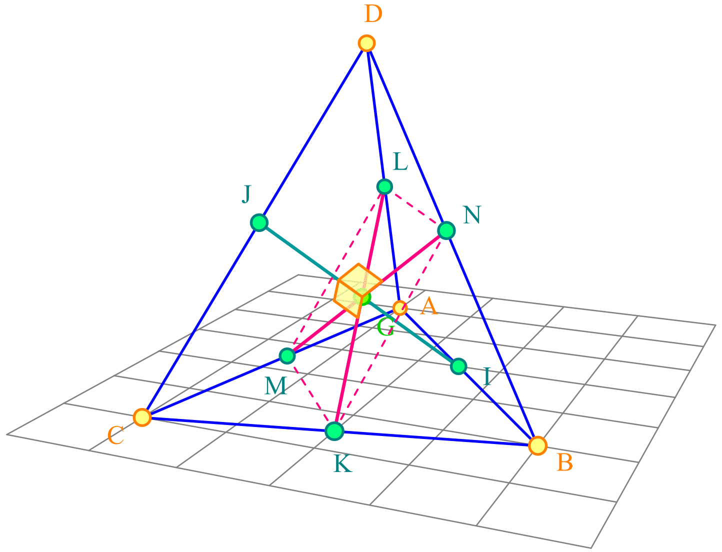
Conclusion : le parallélogramme IKJL ayant deux côtés consécutifs égaux en J, nous en déduisons que c'est un losange. Donc ses diagonales [IJ] et [KL] se coupent perpendiculairement.



De la même façon et pour les mêmes raisons, on prouve que les quadrilatères IMJN et KNLM sont des parallélogrammes ayant deux côtés consécutifs égaux, c'est-à-dire des losanges. Par conséquent, leurs paires de diagonales respectives [IJ] et [MN], ainsi que [KL] et [MN] se coupent perpendiculairement.

3.a) Les droites (KL) et (MN) se coupent en G dans le plan (MNK).
Comme la droite (IJ) est orthogonale aux deux droites (KL) et (MN) sécantes du plan (MNK), alors la droite (IJ) est orthogonale au plan (MNK).

3.b) Comme le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (MNK), alors il est orthogonal à tous les vecteurs (directeurs) portés par le plan (MNK). En particulier, il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{MK}$. Par conséquent, le produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$ est nul.



➲ M et K étant les milieux respectifs des côtés [CA] et [CB] dans le triangle ABC, le vecteur $\overrightarrow{MK}$ mesure la moitié du vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB}$.

Surtout les vecteurs $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Par conséquent, comme le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{MK}$, alors il est aussi orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

<u>Conclusion :</u> la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB).

➲ De la même façon, le vecteur normal $\overrightarrow{IJ}$ est aussi orthogonal au vecteur $\overrightarrow{KN}$ qui est porté par le plan (MNK).

Or, dans le triangle BCD, comme K et N sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [BD], alors $\overrightarrow{KN}$ mesure la moitié de $\overrightarrow{CD}$ et là encore, ces deux vecteurs sont colinéaires.

Donc le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est donc aussi orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CD} = 2 \times \overrightarrow{KN}$.

<u>Conclusion :</u> la droite (IJ) est aussi orthogonale à la droite (CD).

3.c) Le plan médiateur du segment [AB] que nous appellerons $\mathscr{P}$ est le plan passant par son milieu I et perpendiculaire à la droite (AB).

Or comme la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB), alors elle est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Comme $I \in (AB)$ appartient au plan $\mathscr{P}$, alors c'est toute la droite (IJ) est incluse dans $\mathscr{P}$.

Le point G appartenant à la droite (IJ), il fait partie de facto du plan $\mathscr{P}$.

De la même façon, le plan médiateur $\mathscr{Q}$ du segment [CD] est le plan passant par son milieu J et orthogonal au segment [CD].

Comme la droite (IJ) est orthogonale à (CD) et qu'elle contient un point de $\mathscr{Q}$ qui est J, alors la droite (IJ) est aussi parallèle et incluse dans le plan $\mathscr{Q}$.

Par suite, le point $G \in (IJ)$ appartient aussi à $\mathscr{Q}$.

3.d) Le point G appartenant au plan médiateur $\mathscr{P}$ de [AB], il est équidistant de A et de B.

De même, son appartenance au plan médiateur $\mathscr{Q}$ de [CD] fait qu' il est aussi équidistant de C et de D.

Ainsi avons-nous les égalités :

$$GA = GB \qquad\qquad GC = GD$$

Ce qu'il faudrait, c'est que par exemple, les distances GB et GC soient aussi égales.

Et bien, c'est le cas car la droite (KL) est orthogonale à (BC). En effet :

> Les droites (MN) et (IJ) sont deux droites sécantes en G du plan (MJNI).
> Comme, d'après la question 2.b, la droite (KL) est orthogonale aux deux droites sévantes (MN) et (IJ), alors (KL) est normale au plan (MJNI).
> De facto, (KL) est orthogonale à toute droite portée par ce plan : en particulier à la droite (IM)...qui est parallèle à la droite (BC) du fait du théorème des milieux appliqué dans le triangle ABC.
> Donc la droite (KL) est bien orthogonale à (BC).

Poursuivons !

Comme (KL) est orthogonale au segment [BC] qu'elle coupe en son milieu K, alors la droite (KL) est incluse dans le plan médiateur de [BC].

Le point G qui fait partie de la droite (KL) appartient au plan médiateur de [BC]. Donc il est équidistant de B et C. Ainsi :

$$GB = GC$$

<u>Conclusion :</u> comme $GA = GB = GC = GD$, alors le point G est équidistant des quatre sommets du tétraèdre. Il est le centre de la sphère circonscrite au polyèdre ABCD.