Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

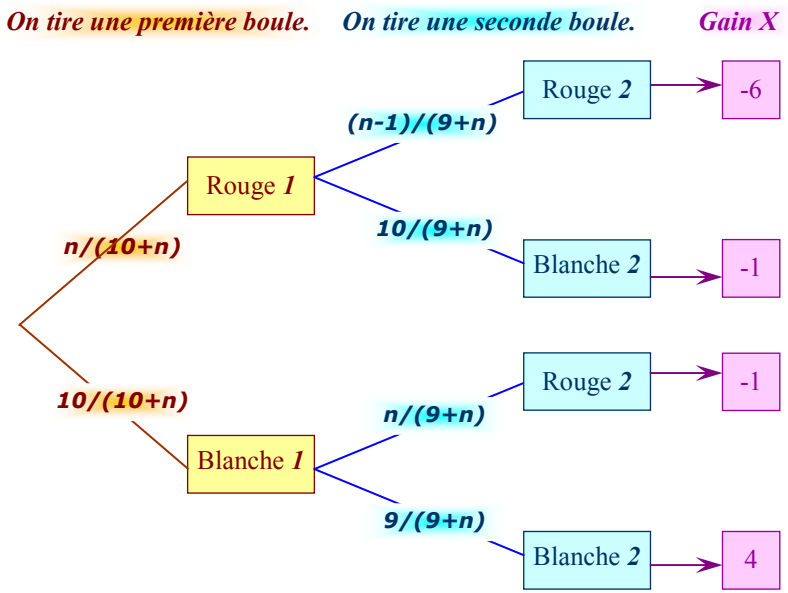
Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

1.a) Démontrer que :

$$p(X=-1)=\frac{20.n}{(n+10).(n+9)}$$

La première chose est à faire est un arbre pondéré décrivant la situation.



La variable aléatoire X ne peut prendre que trois valeurs :

- $\rightarrow$ $4=2+2$ pour deux boules blanches.
- $\rightarrow$ $-1=2+(-3)=(-3)+2$ pour une boule rouge et une boule blanche
- $\rightarrow$ $-6=(-3)+(-3)$ pour deux boules rouges

A partir de l'arbre, nous déduisons :

$$p(X=-1)=p(\text{Rouge } \textit{1} \rightarrow \text{Blanche } \textit{2})+p(\text{Blanche } \textit{1} \rightarrow \text{Rouge } \textit{2})$$

$$=\frac{n}{10+n}\times\frac{10}{9+n}+\frac{10}{10+n}\times\frac{n}{9+n}=\frac{10.n+10.n}{(n+10).(n+9)}=\frac{20.n}{(n+10).(n+9)}$$

1.b) Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable aléatoire X.

Toujours en utilisant l'arbre pondéré, nous pouvons écrire :

$$p(X=-6)=p(\text{Rouge } \textit{1} \rightarrow \text{Rouge } \textit{2})=\frac{n}{10+n}\times\frac{n-1}{9+n}=\frac{n^2-n}{(n+10).(n+9)}$$

$$p(X=4)=p(\text{Blanche } \textit{1} \rightarrow \text{Blanche } \textit{2})=\frac{10}{10+n}\times\frac{9}{9+n}=\frac{90}{(n+10).(n+9)}$$

1.c) Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$E(X)=\frac{-6.n^2-14.n+360}{(n+10).(n+9)}$$

L'espérance de la variable aléatoire X est donnée par :

Somme des produits "valeurs de X × probabilités"

$$E(X)=p(X=4)\times 4+p(X=-1)\times(-1)+p(X=-6)\times(-6)$$

$$=\frac{90}{(n+10).(n+9)}\times 4+\frac{20.n}{(n+10).(n+9)}\times(-1)+\frac{n^2-n}{(n+10).(n+9)}\times(-6)$$

$$=\frac{360-20.n-6.n^2+6.n}{(n+10).(n+9)}$$

$$=\frac{-6.n^2-14.n+360}{(n+10).(n+9)}$$

1.d) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

Pour répondre à cette question, nous devons résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :

$$E(X)>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-6.n^2-14.n+360}{(n+10).(n+9)}>0$$

Les facteurs $n+10$ et $n+9$ étant toujours strictement positifs sur $\mathbb{N}$, le signe de $E(X)$ est celui de son numérateur $U(n)=-6.n^2-14.n+360$.

Calculons le discriminant de la forme du second degré $U(x) = -6.x^2 - 14.x + 360$:

$$\Delta_{U(x)} = (-14)^2 - 4\times(-6)\times 360$$
$$= 196 + 8640 = \underline{8836 = 94^2}$$

Comme son discriminant est positif, alors $U(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-14)-94}{2\times(-6)} = \frac{-80}{-12} = \underline{\frac{20}{3}} \qquad \underline{\text{et}} \qquad x_2 = \frac{-(-14)+94}{2\times(-6)} = \frac{108}{-12} = \underline{-9}$$

Et le tableau de signe de la forme du second degré $U(x)$ est :

x	$-\infty$		-9		$\frac{20}{3}$		$+\infty$
U(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

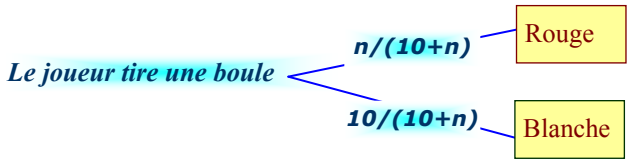
Conclusion : l'espérance de gain $E(X)$ est positive lorsque n est inférieur à $\frac{20}{3}$.

Autrement dit, lorsqu'il y a une, deux, trois, quatre, cinq ou six boules rouges dans l'urne.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule dans l'urne. Les tirages sont indépendants.

Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

Ces 20 tirages successifs et indépendants forment un schéma de Bernoulli dont l'épreuve de base est :



On appelle Y le nombre de tirages où une boule rouge est tirée.

La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{n}{10+n}$.

Par conséquent, la probabilité qu'au moins une boule rouge soit tirée au cours des 20 tirages est donnée par :

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{20}{0}\times\left(\frac{n}{10+n}\right)^0 \times\left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20}$$

Enfin, on souhaite savoir pour quelle valeur de n, cette probabilité est strictement supérieure à 0,999. Pour cela, nous devons résoudre :

$$p(Y \geq 1) > 0{,}999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} > 0{,}999 \Leftrightarrow -\left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} > -0{,}001$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} < 0{,}001}_{\text{Après multiplication par } -1} \overset{\text{Ln}}{\Rightarrow} \underbrace{20\times\ln\left(\frac{10}{10+n}\right) < \ln\left(10^{-3}\right)}_{\text{Ln est croissante sur }]0;+\infty[}$$

Petit jeu de multiplications avec des facteurs tous positifs.

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{10}{10+n}\right) < \frac{-3.\ln(10)}{20} \overset{\text{Exp}}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{10}{10+n} < \exp\left(-\frac{3}{20}.\ln(10)\right)}_{\text{Exp est croissante sur } \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\exp\left(-\frac{3}{20}.\ln(10)\right)} < n+10 \Rightarrow \underline{n > \frac{10}{\exp\left(-\frac{3}{20}.\ln(10)\right)} - 10}$$

$$\Rightarrow n > 4{,}12$$

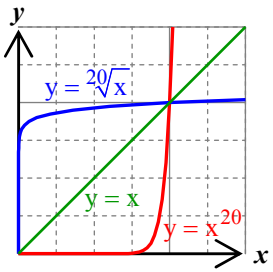
Conclusion : il faut avoir au minimum cinq boules rouges dans l'urne.

Une autre finition peut-être plus...fine

Pour nous débarrasser de l'exposant 20, nous avons appliqué à l'inégalité d'abord la fonction logarithme népérien, puis la fonction exponentielle.

Nous aurions pu être plus directs en appliquant la fonction racine vingtième :

$$f(t) = \sqrt[20]{t} = t^{1/20} = \exp\left(\frac{1}{20}.\ln(t)\right)$$



La fonction racine vingtième est la réciproque de la fonction puissance vingtième sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Leurs courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice du plan comme celles des fonctions logarithme et exponentielle.

Cette fonction est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ car elle y est la composée :

$$t \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Ln}} \ln(t) \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{u(x)=\frac{x}{20}} \frac{\ln(t)}{20} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{\text{Exp}} \exp\left(\frac{\ln(t)}{20}\right)$$

Revenons à notre exercice où la fin aurait été plus rapide...

$$\left(\frac{10}{10+n}\right)^{20} < 0{,}001 \overset{\sqrt[20]{\ldots}}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{10}{10+n} < \sqrt[20]{0{,}001}}_{\text{La fonction racine vingtième est croissante sur }]0;+\infty[} \Leftrightarrow \underline{n > \frac{\overbrace{=10^{23/20}}}{\sqrt[20]{0{,}001}} - 10}$$

3. On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.
Le joueur ne sait pas que le jeu lui est défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.
Le nombre de boules blanches étant faible devant celui de boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{Pour tout entier naturel } k, \quad p(Z \leq k) = \int_0^k 0,01.e^{-0,01.x}.dx$$

On répondra aux questions suivantes à l'aide de ce modèle :

3.a) Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $p(Z \leq 50)$.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$0,01.e^{-0,01.x} = -(-0,01).e^{-0,01.x} = -u' \times e^u$$

est la fonction :

$$-e^u = \underline{-e^{-0,01.x}}.$$

La probabilité demandée est donnée par un simple calcul d'intégrale :

$$p(Z \leq 50) = \int_0^{50} 0,01.e^{-0,01.x}.dx$$

$$= \left[-e^{-0,01.x}\right]_0^{50} = \left(-e^{-0,5}\right) - \left(-e^0\right) = -\frac{1}{\sqrt{e}} + 1 = \underline{1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,393}$$

3.b) Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement : «le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche» sachant l'événement «le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche».

La probabilité conditionnelle demandée est donnée par le quotient :

$$p(Z \leq 60 \text{ sachant } Z > 50) = \frac{p(Z \leq 60 \text{ et } Z > 50)}{p(Z > 50)}$$

$$= \underline{\frac{p(50 < Z \leq 60)}{p(Z > 50)}}$$

*Début de l'ambiguïté : **plus de 50 boules** signifie-t-il **50 et plus** ou **51 et plus** ? Nous optons pour la seconde formulation mais bon...*

Calculons les deux probabilités constituant ce quotient :

$$p(50 < Z \leq 60) = p(Z \leq 60) - p(Z \leq 50)$$

$$= \underbrace{\int_0^{60} 0,01.e^{-0,01.x}.dx - \int_0^{50} 0,01.e^{-0,01.x}.dx = \int_{50}^{60} 0,01.e^{-0,01.x}.dx}_{\text{Merci Chasles !}}$$

$$= \left[-e^{-0,01.x}\right]_{50}^{60} = \left(-e^{-0,6}\right) - \left(-e^{-0,5}\right) = \underline{e^{-0,5} - e^{-0,6}}$$

Et aussi :

$$p(Z > 50) = 1 - p(Z \leq 50) = 1 - \left(1 - e^{-0,5}\right) = \underline{e^{-0,5}}$$

Nous en déduisons alors :

$$p(Z \leq 60 \text{ sachant } Z > 50) = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{e^{-0,5}} = \frac{e^{-0,5}}{e^{-0,5}} - \frac{e^{-0,6}}{e^{-0,5}} = \underline{1 - e^{-0,1} \approx 0,095}$$

L'ambiguïté de la variable aléatoire Z

De par sa définition, on pourrait être tenté de croire que la variable aléatoire Z est continue et que sa loi de probabilité est la loi exponentielle de paramètre 0,01.
Sauf qu'il est bien spécifié que Z ne peut prendre que des valeurs entières : donc Z est discrète. Tous les attributs des lois exponentielles ne lui sont pas applicables.

D'ailleurs, si les notations $\underbrace{Z < 51}_{\text{Il faut strictement moins de 51 tirages soit au maximum 51.}}$ et $Z \leq 50$ désignent le même événement,

leurs probabilités ne se calculeraient pas de la même façon si l'on considérait Z comme une variable aléatoire continue. En effet :

*Il faut donc en rester à la définition de **p(Z≤k)** donnée par l'énoncé sans quoi c'est le bordel !*

$$p(Z \leq 50) = \int_0^{50} 0,01.e^{-0,01.x}.dx = \underline{1 - e^{-0,5}}$$

$$p(Z < 51) = p(Z \leq 51) = \int_0^{51} 0,01.e^{-0,01.x}.dx = \underline{1 - e^{-0,51}}$$

Cela dit, les questions 3.a et 3.b sont bancales et très ambigües au regard du programme officiel.