Ce cours a été rédigé en décembre 1994 alors que je préparais l'agrégation de mathématiques et mis à jour en juillet 2001.
Dans le cas où il comporterait des erreurs, merci de me les signaler.
Il est exclusivement mis en ligne par le site "la taverne de l'Irlandais" (http://www.tanopah.com).
Ce cours est du niveau Licence.

A L'ENDROIT DU THEOREME D'ALEMBERT

Le corps des complexes C est algébriquement clos. C'est le théorème d'Alembert-Gauss qui l'annonce. Cela signifie que tout polynôme à coefficients complexes peut s'écrire comme un produit de monômes de la forme $a.X + b$.
Il existe deux démonstrations du théorème. La première est purement algébrique. Elle a été faite par Gauss très célèbre mathématicien du dix-neuvième siècle qui a bien d'autres théorèmes à son nom !
La seconde preuve découle des propriétés analytiques de **C**. C'est la plus courte et certainement la plus accessible. C'est avec elle que nous allons démontrer le théorème d'Alembert-Gauss.

Théorème d'Alembert-Gauss : C est un corps algébriquement clos.

La preuve : *Si nous démontrons que tout polynôme P∈**C**[X] admet au moins une racine sur **C**, nous aurons alors prouvé que le corps des complexes est algébriquement clos.*

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$ un polynôme à coefficients complexes de degré n.
Procédons par l'absurde : supposons que P n'admette aucune racine sur **C**.
Cela veut donc dire que le minimum de la fonction $|P|$ est non nul. Appelons-le µ.

Comme P est un polynôme, on a alors que $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$.
Il existe nécessairement un réel positif R tel que sur tout $\mathbf{C} \backslash \overline{D}(0,R)$ on ait que $|P(z)| \geq |P(0)|$.
Note : $\overline{D}(0,R)$ *désigne le disque fermé de centre 0 et de rayon R.*
En tant que polynôme, P est continue sur **C**.
Il l'est donc en particulier sur le compact $\overline{D}(0,R)$ qui est un compact de **C**. Il y est donc borné et il y

atteint ses bornes.

Par ce qui vient d'être dit, il existe $z_0 \in \overline{D}(0,R)$ tel que $|P(z_0)| = \mu$.
On a alors que $\forall\ z \in \mathbf{C} \setminus \overline{D}(0,R)$ $|P(z)| \geq |P(0)| \geq \mu$.
Donc pour tout complexe z ,on a que $|P(z)| \geq \mu$.
Comme P est un polynôme, P admet un développement de Taylor en z_0 c'est-à-dire qu'il existe des complexes $c_k, c_{k+1}, \ldots, c_n$ avec $k \in \{1,...,n\}$ tel que $c_k \neq 0$ et tel que $\forall\ z \in \mathbf{C}$ **:**

$$P(z) = P(z_0) + c_k.(z - z_0)^k + \ldots + c_n.(z - z_0)^n$$

Là nous devons envisager deux cas :

- soit $k = n$: A ce moment là pour tout $\rho>0$, on a que $\forall\ z \in \overline{D}(z_0,\rho)$, $\left|c_k.(z - z_0)^k\right| \leq |c_k|.\rho^k$.
- soit $k < n$: De là, comme $\left|\sum_{j=k+1}^{n} c_j.(z - z_0)^j\right| \leq |z - z_0|^k.\left|\sum_{j=1}^{n-k} c_{k+j}.(z - z_0)^j\right|$ et vu que $\lim_{z \to z_0} \sum_{j=1}^{n-k} c_{k+j}.(z - z_0)^j = 0$, alors il existe $\rho>0$ tel que pour tout $z \in \overline{D}(z_0,\rho)$:

$$\left|\sum_{j=k+1}^{n} c_j.(z - z_0)^j\right| \leq \left|c_k.(z - z_0)^k\right| \leq |c_k|.\rho^k$$

Dans les deux cas, on peut supposer que $|c_k|.\rho^k < \mu$ cela quitte à réduire ρ.
On a alors que pour tout $z \in C(z_0, \rho)$ (comprenez le le cercle de centre z_0 et de rayon ρ), on a que :

$$c_k.(z - z_0)^k \in C(0,\ |c_k|.\rho^k)$$

Réciproquement pour tout $y \in C(0,\ |c_k|.\rho^{k)})$, il existe un $z \in C(z_0, \rho)$.
Ceci car l'application $z \to z^k$ est bijective sur $\mathbf{C}$ et sa réciproque $z \to \sqrt[k]{z}$ y est parfaitement définie.

Par suite, il vient que l'image du cercle $C(z_0, \rho)$ par l'application $z \to P(z_0) + c_k.(z - z_0)^k$ est $C(P(z_0),\ |c_k|.\rho^k)$ c'est-à-dire le cercle de centre $P(z_0)$ et de rayon $|c_k|.\rho^k$.

Comme $|P(z_0)| = |P(z_0) - 0| = \mu > |c_k|.\rho^k$, 0 est donc à l'extérieur du cercle de centre $P(z_0)$ et de rayon $|c_k|.\rho^k$.
Donc $C(P(z_0),\ |c_k|.\rho^k)$ rencontre le segment $[0 ; P(z_0)]$ en un point que nous notera y.
Or pour ce y, il existe $z_1 \in C(0, \rho)$ tel que $y = P(z_0) + c_k.(z_1 - z_0)^k$

Vu que tout ce petit monde est sur le segment $[0 ; P(z_0)]$, on a alors que :

$$\left|P(z_0) + c_k.(z_1 - z_0)^k\right| = \mu - |c_k|.\rho^k$$

Là, nous retombons nos deux cas :

- soit k = n : A ce moment là $\left|P(z_1)\right| = \left|P(z_0) + c_k.(z_1 - z_0)^k\right| = \mu - \left|c_k\right|.\rho^k < \mu$

- soit k < n : Et là $\left|P(z_1)\right| \leq \left|P(z_0) + c_k.(z_1 - z_0)^k\right| + \left|\sum_{j=k+1}^{n} c_j.(z_1 - z_0)^j\right|$

$$< \left(\mu - \left|c_k\right|.\rho^k\right) + \left|c_k\right|.\rho^k \leq \mu$$

Nous avons donc trouvé dans les deux cas un complexe z_1 tel que $\left|P(z_1)\right| < \mu$.
Autrement dit, avec ce que nous avons supposé, nous avons établi qu'il existait un nombre complexe z_1 dont l'image par la fonction continue $|P|$ est plus petite que son minimum μ.
Ce qui est très fort !

Notre supposition était donc fausse. Tout polynôme admet donc au moins une racine dans le corps des complexes. Donc tout polynôme de C[X] est entièrement scindé. Donc C est algébriquement clos !

D'où le théorème d'Alembert-Gauss !