Ce cours a été rédigé en juin 1995 alors que je préparais l'agrégation de mathématiques et mis à jour en juin et juillet 2001.
Dans le cas où il comporterait des erreurs, merci de me les signaler.
Il est exclusivement mis en ligne par le site "la taverne de l'Irlandais" (http://www.tanopah.com).
Ce cours est du niveau début de Licence.

Connexitude

- L'aventure des espaces connexes -

Au sommaire :

0°) Préambule.

Avant d'entamer notre épique chevauchée à travers les espaces connexes et tout ce qui s'y de prés ou de loin s'y rattache, nous allons énoncer puis démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème des valeurs intermédiaires (0.1).
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I un ouvert de **R**. Soient a et b tel que $[a\ ;\ b] \subset I$.
Si on pose $\alpha = \mathrm{Min}(f(a), f(b))$ et $\beta = \mathrm{Max}(f(a), f(b))$ alors $\forall y \in [\alpha\ ;\ \beta]$, il existe $c \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = y$.

La preuve : Si $\alpha = \beta$ alors le théorème est trivialement évident.
Dans tout ce qui suit, on supposera donc que $\alpha \neq \beta$.
Soit $y \in [\alpha, \beta]$. On a alors que $f^{-1}(]-\infty\ ;\ y])$ et $f^{-1}([y\ ;\ +\infty[)$ sont deux fermés de I.
Ceci car $]-\infty\ ;\ y]$ et $[y\ ;\ +\infty[$ sont fermés dans **R** et que f est continue.

Comme de plus $[a\ ;\ b]$ est fermé alors $K = f^{-1}(]-\infty\ ;\ y]) \cap [a\ ;\ b]$ et $K' = f^{-1}([y\ ;\ +\infty[) \cap [a\ ;\ b]$ sont deux fermés de **R** et même de $[a\ ;\ b]$.
Comme de plus, ces deux-là sont inclus dans $[a\ ;\ b]$ qui est un compact de **R** (et de lui-même!) alors K et K' sont eux-aussi compacts.
Comme K est compact, il existe $c \in K$ tel que $c = \mathrm{Sup}(K)$. (Pour ceux qui ne verraient pas pourquoi, il suffit de considérer l'application $Id_{[a\ ;\ b]}$ qui est continue sur $[a\ ;\ b]$).
Il s'agit alors de montrer que $f(c) = y$.
Comme $c \in K$, on a déjà que $f(c) \leq y$.
Comme de plus $c = \mathrm{Sup}(K)$ alors $\forall x \in]c\ ;\ b]$ x n'est pas dans K et donc $f(x) > f(c)$.
Or f est continue sur $[a\ ;\ b]$ et trivialement on a que $f(c) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.
Par passage à la limite, il vient alors que $f(c) \geq y$.

D'où le théorème...

1°) De la connexité.

Dans tout ce qui suit E désignera un espace topologique.
Pour note, on rappelle que si E est un ensemble alors le sous-ensemble de P(E) qu'on notera T définit une topologie sur E si et seulement si $\varnothing$ et E sont dans T, si T est stable par intersection finie et si T est stable par union quelconque. Les éléments de T sont alors appelés les ouverts de E pour cette topologie.

A présent on a le théorème/définition suivant :

Théorème/Définition 1.1 : Soit E un espace topologie alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts de E non vides.
(ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés de E non vides.
(iii) Les seuls ouverts de E qui sont aussi fermés dans E sont $\varnothing$ et E.

Si E vérifie l'une de ces trois assertions alors dit-on que E est connexe.

Que les assertions (i) et (ii) soient équivalentes relèvent du complémentaire. (Euh celui des ensembles, pas celui du Loto!).
Que (i) $\Rightarrow$(iii) est assez évident. Car si ayant (i), O est à la fois ouvert et fermé dans E et alors E\O est alors un ouvert de E. Là si O était distinct de $\varnothing$ ou de E alors nous aurions trouver une partition de E en deux ouverts de E non vides en la personne de O et E\O.
Que (iii) $\Rightarrow$(i) est là-encore fastoche! Ayant (iii), supposons qu'il existe une partition de E en deux ouverts non vides que nous appellerons O et O'. Comme O' = E\O et O = E\O', les deux compères que sont O et O' sont à la fois fermés et ouverts dans E. De plus comme ils sont non vides, ils sont de fait distinct de E et du $\varnothing$ qui est sensé symboliser le vide. (Rien à voir avec les cigares du pharaon!). D'où une belle contradiction avec (iii).

Etre connexe, c'est bien! Mais être un connexe qui s'exporte c'est mieux ! Et certains y arrivent !

Théorème 1.2 : E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application continue sur E.

Si E est connexe alors f(E) est connexe.

Pour éviter toute confusion f(E) est connexe pour la topologie induite par F sur f(E). O est notamment un ouvert de f(E) si et seulement s'il est l'intersection d'un ouvert de F avec f(E).

La preuve : Supposons que f(E) ne soit pas connexe alors il existe O et O' deux ouverts non vides et disjoints de f(E) tel que $f(E) = O \cup O'$. (O et O' réalisent une partition de f(E).
Comme f est continue sur E alors $f^{-1}(O)$ et $f^{-1}(O')$ sont alors ouverts dans E.
De plus l'un comme l'autre sont non vides et ils sont disjoints.
Ces propriétés, ils les doivent à O et O'.
De plus ils réalisent une partition de E. (Ce qui n'est pas dans l'un est dans l'autre vu que $E = O \cup O'$).
Autrement dit E n'est pas connexe! Contradiction qui nous assure la connexité de f(E).

Mais pourrait-on se demander, n'y-t-il pas une manière plus populaire et plus commune de caractériser les espaces connexes. La réponse à cette question est "Ouaip!". En voici l'illustration.

Théorème 1.3 : Soit E un espace topologique. Alors il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(i) E est connexe.
(ii) Toute fonction $f : E \to \{0, 1\}$ continue sur E est constante sur E.

Avant d'aller plus loin, un mot sur la topologie s'appliquant dans le cas présent à $\{0, 1\}$. C'est la topologie induite par **R** avec sa valeur absolue. Autrement dit $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des fermés de $\{0, 1\}$ donc comme le tout moins l'autre donne l'un, on en déduit que tous les sous-ensembles de $\{0, 1\}$ que sont $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$ sont des ouverts de $\{0, 1\}$. Ce qui nous simplifiera le travail !

La preuve : *Nous avons donc deux implications à établir.*
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction $f : E \to \{0, 1\}$ continue sur E et non constante. On a alors vu que $\{0, 1\}= \{0\}\cup\{1\}$ que $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont deux ouverts non vides de E et surtout qu'ils réalisent une partition de E.
Ce qui est stupidement absurde vu que E est connexe.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Là encore par l'absurde. Supposons que E ne soit pas connexe, c'est-à-dire qu'il existe deux ouverts disjoints et non vides de E que nous noterons O et O' tels que $E = O\cup O'$.
Considérons alors $\chi_O : E \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de O (qui si $x\in O$ alors $\chi_O(x) = 1$ et 0 sinon).
Il est clair que χ_O est continue sur E. En effet si $x\in O$ alors O étant ouvert dans E c'est un voisinage de x dans E et de plus $\chi_O(O) = \{1\}$. De même si $x\in O' = E\backslash O$ alors O' est un voisinage ouvert de x dans E tel que $\chi_O(O') = \{0\}$. On a donc trouvé une application continue sur E à valeurs dans $\{0, 1\}$ qui ne soit pas réduit à une constante. Ce qui est très drôle et très contredisant vis-à-vis de (ii). Par suite E est donc connexe.

Ce théorème nous permet d'enchaîner sur la proposition suivante :

Proposition 1.4 : *Elle comporte deux assertions.*
(i) Si E est un espace topologique et A une partie de E connexe alors $\overline{A}$ est connexe.
(ii) Si E est un espace topologique et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E connexes ayant un point un commun (i. e $\exists a\in E$ tel que $\forall i\in I,\ a\in A_i$) alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est une partie de E connexe.

La preuve : *Nous avons donc deux choses à montrer.*
(i) Si $f : \overline{A} \to \{0, 1\}$ est une application continue sur $\overline{A}$ alors cette application est également continue sur A qui est connexe. Donc il existe $c\in \{0, 1\}$ tel que $\forall x\in A$, $f(x) = c$.
Or on a que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. En effet si $y\in f(\overline{A})$ alors il existe $x\in \overline{A}$ tel que $f(x) = y$. Et donc il existe une suite $(x_n)_{n\in \mathbf{N}} \subset A$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Par suite comme f est continue sur $\overline{A}$ vient-il que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x) = y$.
Autrement dit, en la personne de $(f(x_n))_{n\in \mathbf{N}} \subset f(A)$ a-t-on trouvé une suite qui convergeait vers y donc $y\in \overline{f(A)}$.
Ce qui donne ce qu'on voulait !.
Bref il vient donc que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \{c\}$.
Ainsi cette application f est-elle constante sur $\overline{A}$ ce qui assure de part le théorème 1.3 que $\overline{A}$ soit connexe.

(ii) Soit $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \{0, 1\}$ une application continue sur $\bigcup_{i\in I} A_i$.
On a alors que $\forall i\in I$, f est continue sur A_i qui rappelons-le est connexe. Donc en vertu du théorème 1.3, il existe $c_i\in \{0, 1\}$ tel que $\forall x\in A_i$, $f(x) = c_i$.

Or $\forall i \in I,\ a \in A_i$. Ainsi pour tout $i \in I$ a-t-on que $c_i = f(a)$.
Ce qui assure que f soit constante sur $\bigcup_{i\in I} A_i$ et donc finalement toujours en vertu du précédent théorème que $\bigcup_{i\in I} A_i$ soit une partie de E connexe.

De façon plus générale, on a même le théorème suivant :

Théorème : Soit E un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de E tel qu'il existe un $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I,\ A_i \cap A_{i_0} \neq \varnothing$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est une partie connexe de E.

Il se montre de la même façon que le point (ii) de notre proposition 1.4. On peut d'ailleurs considérer ce point (ii) comme étant un corollaire de ce théorème!

Pour achever ce premier paragraphe, nous allons dire deux mots des produits d'espaces connexes à partir du théorème suivant.

Théorème 1.5 : Soit $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille d'espaces topologiques non vides.
Il y a équivalence entre :

(i) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ E_i est connexe.

(ii) $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est connexe.

Pour note, on rappelle que si $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ la topologie est définie sur E_i par l'ensemble des ouverts O_i et si on appelle B le sous-ensemble de $P\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right)$ défini par :

$$B = \left\{ \text{Sous-ensemble } X \text{ de } \prod_{i=1}^{n} E_i \text{ tel que } \forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ il existe } X_i \in O_i \text{ avec } X = \prod_{i=1}^{n} X_i \right\}$$

alors O le plus petit sous-ensemble de P(E) contenant B, stable par intersection finie et union dénombrable. (Il existe grâce au lemme de Zorn!) définit la topologie produit de l'espace topologique produit qu'est $\prod_{i=1}^{n} E_i$.

A présent, nous allons montrer notre théorème.

La preuve : *Nous avons deux implications à prouver pour démontrer l'équivalence.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : On note $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$.

Soit $f : E \to \{0, 1\}$ une application continue sur E.

On note alors $\forall$ a = $(a_i)_{i\in\{1,\,...\,,\,n\}}\in E$ et $\forall j\in\{1,\,...\,,\,n\}$

$$\varphi_{a,j} : E_j \longrightarrow \{0;1\}$$

$$x_j \longrightarrow f(a_1,\ldots,x_j,\ldots,a_n)\,.$$

Comme f est continue sur E et que l'application d'injection $\begin{aligned} E_j &\longrightarrow E \\ t &\longrightarrow (a_1,\ldots,t,\ldots,a_n) \end{aligned}$ est continue sur E_j,

alors $\varphi_{a,\,j}$ est continue sur E_j. Cet espace étant connexe, elle y est donc constante.
Ainsi si x = $(x_i)_{i\in\{1,\,...\,,\,n\}}$ et y = $(y_j)_{j\in\{1,\,...\,,\,n\}}$ sont dans E alors a-t-on que comme $\varphi_{x,\,1}$ est constante sur E_1 que :

$$f(x_1,\,...\,,\,x_n) = f(y_1,\,x_2,\,...\,,\,x_n).$$

Par récurrence sur j, on montre alors que comme $\varphi_{(y_1,\ldots,y_{j-1},x_j,\ldots,x_n),j}$ est constante sur E_j.
Il vient alors que :

$$f(x_1,\,...\,.\,,\,x_n) = f(y_1,\,...\,,\,y_{j-1},\,x_j,\,...\,,\,x_n) = \varphi_{(y_1,\ldots,y_{j-1},x_j,\ldots,x_n),j}(y_j)$$

c'est-à-dire que $\quad f(x_1,\,...\,,\,x_n) = f(y_1,\,...\,,\,y_j,\,x_{j+1},\,...\,,\,x_n).$

Finalement $\forall$x, y$\in$E f(x) = f(y) donc f est constante sur E et E est bien connexe.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Là il suffit de considérer $\forall i\in\{1,\,...\,,\,n\}$ l'application de projection sur E_i. Cette dernière étant de fait continue, E_i est alors un espace topologique connexe.

Pour terminer ce paragraphe, sachez que si E est un espace topologique quelconque et si a est un élément de E alors on appelle <u>composante connexe</u> de a le plus grand connexe de E contenant {a}. On note souvent celui-ci C(a). Mais me direz-vous cet ensemble qu'est C(a) existe-t-il toujours ?
La réponse est oui. Car {a} a lui tout seul est connexe. (Pas trop dur à voir).
Là-dessus $\displaystyle\bigcup_{\substack{A \text{ connexe de } E \\ \text{contenant } a.}} A$ est un connexe de E (en tant que réunion de connexes ayant tous un point en commun c'est-à-dire a) contenant a ainsi que tous les connexes de E contenant a. Autant dire que c'est le plus grand connexe de E contenant a. Celui qu'on voulait !
De plus, on dit qu'un espace topologique quelconque E est <u>localement connexe</u> si et seulement si tout voisinage de tout point a de E contient un voisinage de a dans E connexe.
En aucun cas ce qui est localement connexe n'est automatiquement connexe. Ainsi **Z** est-il localement connexe sans être pour autant connexe. Réciproquement c'est pareil !
Ce qui est connexe n'est pas localement connexe.
Pour caractériser les espaces localement connexes plus facilement, on a alors le théorème suivant :

Théorème 1.6 : Soit E un espace topologique quelconque alors il y a équivalence entre :
(i) E est localement connexe.
(ii) Pour tout ouvert O de E, les composantes connexes de O sont des ouverts de O et donc de E. (car l'ouvert d'un ouvert est ouvert!).

La preuve : *Pour prouver l'équivalence, nous devons établir une implication mutuelle.*
(i) $\Rightarrow$(ii) : Soit O un ouvert non vide de E. Soit $x\in O$. On note C(x) la composante connexe de x dans O. Il s'agit de montrer que C(x) est ouvert.
Soit $y\in C(x)$. Comme O est ouvert, il existe un voisinage V de y dans O qui soit connexe. Ainsi C(x) et V sont-ils deux connexes contenant y.
Vu qu'ils ont un point en commun, leur union bénie par le Pape (pas de sifflet, merci!) est donc connexe. Or $C(x)\cup V$ contient x. Vu que C(x) est le plus grand connexe de E contenant x, il vient de fait que $C(x) = C(x)\cup V$ et donc que $V\subset C(x)$. Autrement dit C(x) est un ouvert de O et de fait de E.
(ii) $\Rightarrow$(i) : Soit $x\in E$ et V un voisinage de x dans E. Il existe alors un ouvert O de E contenant x et contenu dans V. On appelle alors C(x) la composante connexe de x dans O. En vertu du (ii), C(x) est un ouvert de E. C'est donc un voisinage connexe de x dans E qui est contenu dans O donc dans V. Par suite E est donc localement connexe.

2°) Des parties connexes de R et de leurs conséquences.

On entame directement les hostilités avec le théorème suivant.

Théorème 2.1 : Soit I une partie de l'espace métrique **R** pour la valeur absolue alors il y a équivalence entre :

(i) I est connexe.

(ii) I est un intervalle.

La preuve : *Nous avons deux implications à établir.*

(i) $\Rightarrow$(ii) : Ayant (i), supposons que I ne soit pas un intervalle. Il existe alors trois réels a, b, c tels que :

$$a < c < b \quad \text{avec a et b qui font partie de I et c non.}$$

On considère alors les sous-ensembles de I que sont $O = \{x \in I \text{ tel que } x<b\}$ et $O' = \{x \in I \text{ tel que } x>b\}$.

En tant qu'intersection de I et d'ouverts de **R** (en l'occurrence $]-\infty\ ;\ b[$ et $]b\ ;\ +\infty[$) , O et O' sont donc des ouverts de I.

De plus comme $a \in O$ et $c \in O'$, nos deux petits amis sont donc non vides. Enfin comme **R** est totalement ordonné et que $c \notin I$ alors ils sont disjoints et réalisent de fait une partition de E en deux de ses ouverts non vides.

Contradiction car E est connexe. Par suite $\forall a, b \in I$ a-t-on que $[a\ ;\ b] \subset I$. Ce qui fait de I l'intervalle que l'on voulait qu'il soit!

(ii) $\Rightarrow$(i) : Si I n'était pas connexe alors de part un théorème du paragraphe précédent, il existerait une fonction $f : I \to \{0, 1\}$ continue sur I , un $x \in I$, un $y \in I$ tel que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$.

Par le théorème 0.1 des valeurs intermédiaires, il vient alors que $\forall t \in [0\ ;\ 1]\ \exists z \in I$ tel que $f(z) = t$.

Ainsi aurait-on l'absurdité suivante : $[0\ ;\ 1] \subset f(I) \subset \{0, 1\}$.

Contradiction! I est donc connexe.

Une des conséquences est de ce théorème est que **R** est connexe. De façon plus générale, tout espace vectoriel normé (sans contre-indication de dimension) est connexe.

Ceci car si E est un **R**-evn et alors comme $\forall x \in E$ l'application $f_x : \begin{array}{l} R \longrightarrow E \\ t \longrightarrow t.x \end{array}$ est continue sur **R**,

$f_x(\mathbf{R}) = \text{Vect}(x)$ est connexe. De plus comme $\forall x \in E$, $0 \in \text{Vect}(x)$ alors $E = \bigcup_{x \in E} \text{Vect}(x)$ est connexe.

Une autre conséquence est que dans tout **R**-evn, tout segment est connexe.

Ceci car pour tout segment [a ; b] de E , si on désigne par $f : \begin{array}{l} [0;1] \longrightarrow [a;b] \subset E \\ t \longrightarrow t.a + (1-t).b \end{array}$ alors comme f

est continue sur [0 ; 1], en tant qu'image de connexe par f, le segment [a ; b] est connexe.

Une conséquence de cette conséquence est que toute boule dans tout **R**-evn est connexe.

Ceci car si on considère la boule de centre x et de rayon r alors $\forall z \in B(x, r)$, $\forall t \in [0\ ;\ 1]$,

$$\left\|\left(t.x + (1-t).z\right) - x\right\| = (1-t).\left\|x - z\right\| \le \left\|x - z\right\| < r$$

Ce qui nous assure que [z ; x]$\subset$B(x, r) et donc que B(x, r) soit convexe.
Par suite $B(x,r) = \bigcup_{z\in B(x,r)} [z;x]$ est donc connexe en tant qu'union de connexes ayant un point en commun.
Et ceci, c'est valable aussi bien pour les boules ouvertes que pour les boules fermées.

Enfin pour ceux qui se seraient poser la question, sachez que **Q** muni de la valeur absolue comme espace métrique n'est pas connexe.
Ceci car $\forall$x$\in$ **R****Q**, les ouverts de **Q** que sont {t$\in$ **Q** tel que t < x} et {t$\in$ **Q** tel que t > x} réalisent la partition de **Q** connexitiquement fatale.

3°) De la connexité tout court et par arcs.

Soit E un espace topologique. On appelle **arc paramétré** (voir arc tout court) ou chemin continu, toute application continue d'un intervalle fermé borné de **R**. à valeur dans E. De façon plus précise ayant deux points a et b de E, on dit que $\Gamma : [t_0 \,;\; t_1] \to E$ est un arc joignant a à b si et seulement si Γ est continue sur $[t_0 \,;\; t_1]$, $\Gamma(t_0) = a$ et $\Gamma(t_1) = b$.
On dit souvent que a est l'origine du chemin et que b en est l'extrémité.
Quant à $\Gamma([t_0 \,;\; t_1])$, on l'appelle l'image du chemin. Dans la suite, il se pourrait que l'on confonde l'arc et son image. Enfin sachez qu'on notera parfois cette image Im Γ.

Une des conséquences de nos deux définitions est que les images des arcs sont des connexes en tant qu'image de connexes(i. e les intervalles de **R**) par des applications continues.
Il va sans dire que si a, b, c sont trois points de E et que si Γ est un arc joignant a à b et Γ' un arc joignant b à c alors $\Gamma \cup \Gamma'$ est un arc joignant a à c. Il n'y a pour voir cela qu'un re-paramétrage et un raccordement à faire aux niveaux des intervalles. C'est pas trop dur à voir!
Ainsi la relation "Y'a un chemin qui va d'un point à un autre" est-elle une relation d'équivalence. (i. e réflexive, transitive, symétrique).
Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous allons pour le plaisir évoquer le théorème suivant qui suit :

Théorème 3.1 : Soit E un espace topologique quelconque et A une partie de E alors l'image de tout arc Γ joignant un point de l'intérieur de A et un point de l'extérieur de A (i.e l'intérieur du complémentaire de A dans E) rencontre la frontière de A.

La preuve : Dans tout ce qui suit, on supposera que A est d'intérieur et d'extérieur non vide!
Nous allons procéder par l'absurde!
Supposons que Im $\Gamma \subset E\backslash Fr(A)$ où Fr(A) désigne la frontière de A (i.e c'est l'adhérence de A moins son intérieur).
Or E\Fr(A) est la réunion de l'intérieur de A et de son extérieur. Pour plus de commodités, on notera ce dernier Ext(A). Et nous allons montrer pourquoi ceci!

Que Ext(A) et $\dot{A}$ soient dans E\Fr(A) : Si $x \in Ext(A)$ alors $x \in E\, Int(E\backslash A) = E\backslash\overline{A}$.
Or comme $Fr(A) \subset \overline{A}$, il vient alors que $x \in E\backslash Fr(A)$.
De même si $x \in \dot{A}$ alors x ne peut pas être dans Fr(A) du seul fait que $Fr(A) = \overline{A}\backslash\dot{A}$.
Ainsi x est-il dans E\Fr(A).

Que $E\backslash Fr(A) \subset Ext(A) \cup \dot{A}$: Si $x \in E\backslash Fr(A)$ alors $x \notin \overline{A}\backslash\dot{A}$.
Vu que $\overline{A} \supset \dot{A}$, nous pouvons alors envisager deux cas :

- Ou bien $x \in \dot{A}$ et là on a ce que voulait.
- Ou bien $x \notin \dot{A}$ ce qui implique de fait de $x \in E\backslash\overline{A}$ ce dernier n'étant en fait qu'extérieur de A.

Ainsi a-t-on que $E\backslash Fr(A) = Ext(A) \cup \dot{A}$.
Par suite comme Im $\Gamma \subset E\backslash Fr(A)$ et que Ext(A) et $\overline{A}$ sont des ouverts de E non vides et disjoints alors leur intersection avec Im Γ nous donne une partition de ce dernier en deux ouverts disjoints et non vides de ce dernier (n'oublions pas que Im Γ commence dans l'un pour finir dans l'autre!). Ce qui est très donne et très absurde quant on sait que Im Γ est connexe! (Cette chose-là, nous venons de la voir!). Par suite Im $\Gamma \not\subset E\backslash Fr(A)$ et il rencontre donc la frontière de A. Ce que l'on voulait!

Tout cela étant dit, on en arrive à définir la connexité par arcs.

Définition 3.2 : Soit E un espace topologique.
Dire que E est connexe par arcs <u>signifie que</u> $\forall a, b \in E$, il existe un arc joignant a à b.

Par tout ce qu'on a déjà dit les convexes sont déjà connexes par arcs.
Il en va de même de tout ce qui est boule dans n'importe quel **R**-evn et pour tout **R**-evn. Là encore ce n'est pas trop dur à voir !
Car tout ce petit monde est convexe!
Dans le même ordre d'idée, on dit qu'un espace topologique quelconque E est localement connexe par arcs si et seulement si tout voisinage de tout point a de E contient un voisinage de a dans E connexe par arcs. Nous reviendrons à la fin de paragraphe sur ces espaces localement connexes par arcs. Pour note tout ouvert de tout **R**-evn est localement connexe par arcs. Là encore cela tient à la connexité par arcs des boules de ces **R**-evn.
Mais il n'y a pas qu'eux qui sont connexes et connexes par arcs.

Théorème 3.3 : Si E est un espace topologique connexe par arcs alors il est connexe.

La preuve : Soit $a \in E$. On a alors que $\forall b \in E$, il existe un arc Γ_b joignant a à b.
On peut alors écrire que $E = \bigcup_{b \in E} \mathrm{Im}(\Gamma_b)$.
Autrement écrit E est une union de connexes ayant un point en commun. Donc E est connexe.

Il va sans dire que s'appliquant, ce théorème nous permet d'affirmer que les espaces topologiques localement connexes par arcs sont localement connexes.
En reprenant avec ce qu'on avait déjà dit, les convexes sont donc comme nous l'avions déjà pressenti des connexes.
De plus l'image de tout connexe par arcs par une application continue est elle-aussi connexe par arcs.
En effet si E est connexe par arcs et que $f : E \to F$ (où F est un espace topologique) est continue sur E alors $\forall x$ et $y \in f(E)$, il existe a et $b \in E$ tel que $\begin{cases} f(a) = x \\ f(b) = y \end{cases}$.
Comme E est connexe par arcs, il existe un chemin $g : I \to E$ joignant a à b.
Il vient alors que $f o g : I \to f(E)$ est un chemin de f(E) joignant f(a) = x à f(b) = y.
Ainsi f(E) est-il connexe par arcs.
Et réciproquement qu'en est-il ?
Nous n'allons donner qu'une réponse partielle qui n'a juridiction que dans les **R**-evn.

Théorème 3.4 : Soit E un **R**-evn et O un ouvert de E. Alors il y a équivalence entre :
(i) O est connexe.
(ii) O est connexe par arcs.

La preuve : *Nous avons donc deux implications à établir.*
(ii) $\Rightarrow$(i) : C'est du déjà vu! Ce n'est rien d'autre que le <u>théorème 3.3</u>.

(i) $\Rightarrow$(ii) : Là encore, on va procéder par l'absurde. On suppose donc que O est non connexe par arcs.
On peut donc trouver un point a et un point b dans O tel qu'il n'existe aucun arc de O joignant a à b.
On appelle alors $X = \{x \in O$ tel qu'il existe un arc joignant a à x$\}$ et
$Y = O \backslash X = \{y \in O$ tel qu'il n'existe aucun arc joignant a à y$\}$.
Il est clair que X est non vide car a est dedans de même que Y car b y est. De plus ces deux-là réalisent une partition de O, l'un étant le complémentaire de l'autre !

Nous allons alors montrer que X comme Y est un ouvert de O.
Que X soit ouvert : Soit $x\in X$. On note Γ un arc joignant a à x. Comme O est un ouvert de E alors il existe r>0 tel que $B(x, r)\subset O$. Mais cette boule est-elle dans X. La réponse est oui car si $y\in B(x, r)$ alors l'arc résultant de l'union de Γ et de [x ; y] joint alors dans O (rappelons que B(x, r) est convexe. C'est du déjà vu !), a à y donc $y\in X$ ce qui implique que $B(x, r)\subset X$. Par suite X est donc ouvert dans O.
Que Y soit ouvert : Soit $x\in Y$. Comme O est ouvert alors il existe r>0 tel que $B(x, r)\subset O$. On a alors que $\forall y\in B(x, r)$, y est dans Y. En effet si ce n'était pas le cas alors y serait dans x, donc il existerait un arc Γ joignant a à y.
Par suite comme B(x, r) est convexe, il existerait en la personne de $\Gamma\cup[y\,;\,x]$ un arc joignant dans O, a à x. Ce qui est complètement con vu que $x\in Y$. Ainsi $B(x, r)\subset Y$. Et donc Y est un ouvert de O.
Et récapitulant, on a donc trouvé une partition de O en de deux ses ouverts non vides que sont X et Y. Et O est connexe ! C'est très drôle et très absurde!
Par suite O est donc connexe par arcs ce qui nous nous donne ce que nous voulions!

Vous aurez compris que lorsqu'on parle de l'arc [x ; y], on pratique un abus de langage. En fait [x ; y] n'est que l'image de l'arc qu'est

$$\begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & [x;y] \\ t & \longrightarrow & t.x+(1-t).y \end{array}.$$

Mais il est tellement trivial cet arc que tout le monde aura compris. (Enfin j'l'espère!).

De façon plus générale, on a le théorème suivant qui étend au-delà de nos très classiques **R**-evn le résultat précédent. La preuve de celui-ci reprend d'ailleurs l'idée de la démonstration que nous venons, il y a peu, d'achever.

Théorème 3.5 : Soit E un espace topologique localement connexe par arcs alors :
(i) Si E est connexe alors il est connexe par arcs.
(ii) Si il n'est pas connexe alors chacune de ses composantes connexes est fermée, ouverte et connexes par arcs.

La preuve : *Nous avons deux assertions à prouver.*
(i) On suppose donc que E est connexe. Soit $x\in E$.
On note $X = \{y\in E$ tel qu'il existe un chemin joignant x à y$\}$.
Comme précédemment, nous allons montrer que X est à la fois ouvert et fermé.
Il est clair que $x\in X$.
Que X soit ouvert : Soit $y\in Y$ alors comme E est localement connexe par connexe par arcs (pour E) il existe un voisinage V de y dans E connexe par arcs. Ainsi $\forall z\in V$ existe-t-il un chemin allant de z à x (via y). Par suite $V\subset X$ ce qui assure que X soit ouvert.
Que X soit fermé : On note $Y = E\backslash X = \{y\in E$ tel qu'il n'existe pas de chemin allant de x à y$\}$. Nous allons montrer que cet ensemble est un ouvert de E.
Soit donc $y\in Y$ alors comme E est localement connexe par arcs, il existe un voisinage V de y dans E connexe par arcs. Si $z\in V$ alors z ne peut en aucun cas être dans X. En effet car sinon comme précédemment, on aurait un chemin allant de y à x (via z). Ainsi $V\subset Y$ donc X est fermé.

Or X est à la fois ouvert et fermé dans E et il est non vide. En application de l'assertion (iii) de notre définition 1.1 des espaces connexes, il vient donc que X = E. Ainsi E est-il connexe par arcs.

(ii) : On suppose là que E n'est pas connexe. Soit $x\in E$. On note $C(x)$ sa composante connexe. On note là encore $X = \{y\in E$ tel qu'il existe un chemin joignant x à y$\}$.
Comme X est connexe par arcs, il est donc connexe. Ainsi a-t-on que $X\subset C(x)$.
Or C(x) est connexe et X est en vertu de ce qui a été fait au (i) à la fois ouvert et fermé dans E. (Quand nous avons établi cela, la connexité de E n'a pas joué). Il l'est donc encore dans C(x). Comme enfin X est non vide, il vient alors que $X = C(x)$.
C(x) est donc ouvert et fermé dans E et connexe par arcs comme X.

Il existe certainement d'autres théorèmes établissant l'équivalence connexité/connexité par arcs dans certains cas.
Mais dans le cas général la réciproque "connexe $\Rightarrow$ connexe par arcs est fausse". Nous allons le démontrer par le contre-exemple qui suit.

On considère donc l'application $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (t, \sin(\pi/t))$$

.

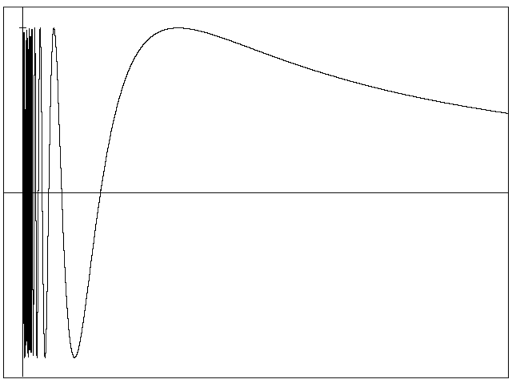
Le contre-exemple 3.6

Comme f est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ qui est un ouvert connexe de **R**, il vient donc que $\Gamma = f(]0\,;\,+\infty[)$ est lui-aussi connexe. Par suite l'adhérence de cet ensemble qu'on notera $\overline{\Gamma}$ est-elle aussi connexe. Le problème qui se pose alors à nous est de savoir quelle est cette adhérence. Nous allons la déterminer!
Si $z\in\{iy$ tel que $y\in[-1\,;\,1]\}$ alors z est limite d'une suite de points de Γ. En effet car si $z = iy$ est dans cet ensemble, on considère alors la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de Γ définie par :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad z_n = (\,t_n\,,\ \sin(\pi/t_n)\,) \text{ où } t_n = \frac{\pi}{2n\pi+\arcsin(y)}\ .$$

Autrement dit $z_n = (t_n, y)$.
Pour note, la fonction arsin est définie sur $[-1\,;\,1]$ qu'elle met en bijection avec $[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}]$. Ce sera en tout cas la définition d'arcsinus qu'on retiendra !
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$, il vient alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = iy = z$ ainsi $\{0\}\times[-1\,;\,1]$ est-il dans $\overline{\Gamma}$.
Réciproquement on montre que $\Gamma\cup(\{0\}\times[-1\,;\,1])$ est fermé dans **C**.
En effet si $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de $\Gamma\cup(\{0\}\times[-1\,;\,1])$ convergeant vers un élément $z\in\mathbf{C}$ alors là plusieurs cas sont à envisager :

- Si on peut extraire de $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite se trouvant dans $\{0\}\times[-1\,;\,1]$. A ce moment-là, comme $\{0\}\times[-1\,;\,1]$ est fermé dans **C** alors cette sous-suite qui est de fait convergente, converge nécessairement dans $\{0\}\times[-1\,;\,1]$ donc $z\in\Gamma\cup(\{0\}\times[-1\,;\,1])$.



Esquisse artistique de Γ. (On ignore toujours qui c'est qui l'a fait!).

• Si on ne peut extraire de $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cette sous-suite, c'est ce le nombre d'éléments de celle-ci se trouvant dans $\{0\}\times[-1\ ;\ 1]$ est de fait limité. Donc pour un certain $N\in\mathbf{N}$, on a que $\forall n\geq N \quad z_n\in\Gamma$. Et là, nous devons encore envisager deux autres cas!

→ Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) = 0$: A ce moment là, il est clair que Re(z) = 0.
De plus comme $\forall n\geq N\ \ z_n\in\Gamma$, on a alors que $\mathrm{Im}(z_n)\in[-1\ ;\ 1]$ et donc que
$\mathrm{Im}(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n) \in[-1\ ;\ 1]$.
Ainsi dans ce sous-cas, a-t-on que $z\in\{0\}\times[-1\ ;\ 1]$.

→ Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) > 0$: A ce moment là, il est clair que $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne peut converger que dans Γ et donc $z\in\Gamma$.
Ceci car$\forall\varepsilon>0$, il existe un n_0 tel que $\forall\ n\geq n_0\ \ |z-z_n|\leq\varepsilon$. En fixant un ε vachement plus petit que $|z|$, il vient alors que $(z_n)_{n\geq n_0}\subset \overline{D}(z,\varepsilon)\cap\Gamma$.
Or $\overline{D}(z,\varepsilon)\cap\Gamma$ est un fermé de **C**.
Ainsi vient-il que $(z_n)_{n\geq n_0}$ converge dans $\overline{D}(z,\varepsilon)\cap\Gamma$ et donc dans Γ. Donc $z\in\Gamma$.
Ce que nous voulions.

Ainsi toute suite convergente de $\Gamma\cup(\{0\}\times[-1\ ;\ 1])$ converge-t-elle dans ce dernier !
Autrement dit $\Gamma\cup(\{0\}\times[-1\ ;\ 1])$ est fermé dans **C**, il contient donc l'adhérence de Γ. Comme il est de plus contenu dans cette dernière, il vient alors que finalement :

$$\overline{\Gamma} = \Gamma\cup(\{0\}\times[-1\ ;\ 1]).$$

Nous allons à présent montrer que bien que connexe, $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs.
Soient $(0, a)\in\{0\}\times[-1\ ;\ 1]$ et $(b, \sin(\pi/b))\in\Gamma$ deux points de $\overline{\Gamma}$ avec b>0. Nous allons montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de chemin joignant (0, a) à $(b, \sin(\pi/b))$.
Supposons qu'il existe un chemin allant de (0, a) à $(b, \sin(\pi/b))$.

Donc il existe une application continue $f : [0;1] \longrightarrow C$ telle que :

$$t \longrightarrow (u(t), v(t))$$

$$f([0\ ;\ 1])\subset\overline{\Gamma}, \qquad f(0) = (0, a) \qquad \text{et} \qquad f(1) = (b, \sin(\pi/b)).$$

Nous nous abstiendrons de faire remarquer qu'avoir un chemin sur tout intervalle compact revient à avoir un chemin défini à [0 ; 1], les intervalles compacts de **R** étant deux à deux homéomorphes ! Mais fallait-il le préciser!
Il va sans dire que u et v sont continues sur [0 ; 1].

On a de plus que $\forall t\in[0\ ;\ 1]$:
- soit u(t) = 0 et alors $v(t)\in[-1\ ;\ 1]$.
- soit u(t)>0 (car $u([0\ ;\ 1])\subset[0\ ;\ +\infty]$) et alors $v(t) = \sin(\pi/u(t))$.

On considère alors le sous-ensemble de [0 ; 1] qu'est $\Omega = u^{-1}(]0\ ;\ +\infty[)$.
Comme u est continue sur [0 ; 1], que]0 ; +∞[est un ouvert de **R**, il vient alors que Ω est un ouvert de [0 ; 1].
Il est plus que clair qu'Ω est réunion de ses composantes connexes. De plus comme [0 ; 1] est localement connexe alors toutes ses composantes connexes sont ouvertes en vertu d'un théorème

énoncé à la fin du premier paragraphe. De plus ces composantes connexes sont dans **R**. Donc ce sont des intervalles de ce dernier inclus dans [0 ; 1].
Soit J une de ses composantes connexes non nulles.
Comme J est un intervalle de [0 ; 1], il existe alors c et d$\in$[0 ; 1] (avec d>c) tel que J soit ou bien [c ; d], ou bien [c ; d[, ou bien] c ; d] ou bien encore]c ; d[.
Mais J étant ouvert dans [0 ; 1], J est donc l'intersection de [0 ; 1] avec un intervalle ouvert de **R**. Ceci nous permet de dire que si c était dans J alors de fait c = 0 (car J est ouvert dans [01]). Or u(0) = 0 donc $0\notin\Omega$ et donc c ne peut-être dans J. Ainsi J ne peut être que du type]c ; d] ou bien]c ; d[.
On a de plus que u(c) = 0 car sinon c serait dans Ω, $J\cup\{c\}$ serait alors dans Ω un connexe contenant strictement une composante connexe de Ω en la personne de J. Quant on sait ce qu'est une composante connexe (voir plus haut), il vient alors que ce n'est pas possible. Ainsi c n'est pas dans Ω et u(c) = 0.
Comme u est continue sur [0 ; 1] et que J est connexe alors il vient que u(J) est lui-aussi un connexe de]0 ; +∞[et donc de **R**.
Ainsi u(J) est-il un intervalle de]0 ; +∞[dont la borne inférieure est 0. En effet comme c est la borne inférieure de J, on a que $\lim\limits_{t\to c^+} u(t) = u(c) = 0$.
De plus comme $\forall t\in J$, u(t)>0 on a alors que $v(t) = \sin(\pi/u(t))$.
Comme u et v sont continues sur [0 ; 1], il vient alors que $v(c) = \lim\limits_{t\to c^+}\left(\sin\left(\pi/u(t)\right)\right)$ ce qui fait que cette dernière limite existe!
Or comme $u(J)\subset\,]0\ ;\ +\infty[$ et que $\lim\limits_{\substack{t\to c^+\\ t\in J}} u(t) = 0$, il vient alors que $\lim\limits_{\substack{t\to c^+\\ t\in J}}\left(\dfrac{\pi}{u(t)}\right) = +\infty$
Ce qui fait que $\lim\limits_{t\to c^+}\left(\sin\left(\pi/u(t)\right)\right)$ ne peut exister car sin n'admet aucune limite à l'infini positif !
D'où la contradiction que nous attendions!
Par suite il n'existe pas de chemin joignant (0, a) à (b, $\sin(\pi/b)$) dans $\overline{\Gamma}$.

Ainsi avons-nous trouvé un ensemble connexe non connexe par arcs. Ce qui achève ce paragraphe et plus généralement notre fabuleuse équipée à travers la Connexitude.