Ce cours a été rédigé en avril 1995 alors que je préparais l'agrégation de mathématiques et mis à jour en juillet 2001. Dans le cas où il comporterait des erreurs, merci de me les signaler.
Il est exclusivement mis en ligne par le site "la taverne de l'Irlandais" (http://www.tanopah.com).
Ce cours est du niveau Licence.

Equations différentielles et théorème de Cauchy-Lipschitz

Au sommaire :

0°) Un petit mot d'introduction.

Dans ce petit exposé, nous ne traiterons pas de la résolution pratique des équations différentielles du premier ordre. Nous laisserons cela à d'autres.

L'objet de notre quête sera de prouver l'existence et l'unicité d'une solution pour chaque problème posé.

Nous allons démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Si ce dernier énoncé ne permet pas de résoudre une équation différentielle du premier ordre, il dit tout de même qu'elle peut l'être. Ce qui est déjà beaucoup...

En tout cas, cela nous suffira !

1°) Des choses à introduire et à définir

Soit E un **R**-espace vectoriel normé.
On appelle équation différentielle du premier ordre toute équation de la forme :

$$y'(t) = f(t, y)$$

où $f : U \to E$ est continue sur U un ouvert de $\mathbf{R}\times E$.

On appelle solution de cette équation différentielle du premier ordre toute application $\varphi : I \to E$, dérivable sur cet intervalle I de **R** telle que :

i. $\forall x \in I, (x, \varphi(x)) \in U$.
ii. $\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

On note S l'ensemble des solutions de cette équation différentielle. On définit alors sur cet ensemble S la relation suivante :

$$\text{Si} \quad \varphi : I \to E \quad \text{et} \quad \phi : J \to E \text{ sont dans S} \quad \underline{\text{alors}} \quad \varphi \Re \phi \Leftrightarrow \begin{cases} I \subset J \\ \forall x \in I, \varphi(x) = \phi(x) \end{cases}.$$

Cette relation est une relation d'ordre sur S. (On aura quand même avant tout cela supposé que S n'est pas vide).

Soit alors $(t_0, y_0) \in U$. On note alors :

$$S_{(t_0,y_0)} = \{ (\varphi : I \to E) \in S \text{ tel que } t_0 \in \overset{\bullet}{I} \text{ et } \varphi(t_0) = y_0 \}$$

où $\overset{\bullet}{I}$ désigne l'intérieur de l'intervalle I.
Là encore cet ensemble est ordonné (partiellement et même dans certains cas totalement) par la relation $\Re$ que nous venons de définir.

Rappelons qu'un intervalle de **R** est un machin qui peut être de type [a;b], [a;b[,]a;b] ou encore]a;b[où a et b sont deux éléments de $\overline{\mathrm{R}}$. Mais était-il bien utile de le rappeler ?

On appelle de plus solution maximale de l'équation différentielle $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, tout élément maximal de $S_{(t_0,y_0)}$ (sous-entendu pour la relation d'ordre évoquée ci-dessus).

Nous avons ici construit certains ensembles dont pour ainsi dire nous ignorons tout. Sont-ils vides ? Comptent-ils au moins un élément ? Y-a-t-il du monde ? Sont-ce des familles monoparentales ? La solitude y sévit-elle ?
A ces questions comme à d'autres et notamment celle de savoir s'ils sont partiellement ordonnés, nous allons y répondre dans un second paragraphe où nous énoncerons et démontrerons le théorème de Cauchy-Lipschitz !

2°) Ce si fameux théorème de Cauchy-Lipschitz !

Et on commence directement avec le si mythique théorème.

Théorème de Cauchy-Lipschitz :.
Soit E un espace de Banach (c'est-à-dire un **R**-evn complet) et U un ouvert de **R**×E.

Si $(t_0, y_0) \in U$ et si $f : U \to E$ est une fonction continue sur U et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (celle de E) <u>alors</u> il existe une application $\varphi : I \to E$ qui fait partie de $S_{(t_0, y_0)}$.

De plus si $\phi : J \to E$ et $\gamma : J' \to E$ sont deux élément de $S_{(t_0, y_0)}$ <u>alors</u> $\forall\, t \in J' \cap J$, $\gamma(t) = \phi(t)$.

Ici I, J et J' sont des intervalles de **R**.

Pour note, on dit que la fonction $f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & E \\ (t;y) & \longrightarrow & f(t;y) \end{array}$ est <u>localement lipschitzienne</u> par rapport à la seconde variable (ou plus simplement en y) si et seulement si pour tout $y \in P_E(U)$ (comprenez la projection canonique de U dans E.), il existe k>0, il existe V un voisinage de y dans $p_E(U)$ tel que :

$\forall\, (t, y_1)$ et $(t, y_2) \in U$ avec y_1 et $y_2 \in V$, on a que : $\left\| f(t,y_1) - f(t,y_2) \right\|_E \leq k.\left\| y_1 - y_2 \right\|_E$.

Pour note si E est de dimension finie sur **R** alors toute fonction f de classe C^1 sur un ouvert U de **R**×E est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Ayant énoncé un théorème, nous allons le montrer. Et après nous en tirerons les conséquences qui s'imposent.

La preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz :
Dans notre démonstration, nous nous appuierons sur un lemme qui sera prouvé au troisième paragraphe.
Comme f est localement lipschitzienne en y_0, alors il existe un $\beta>0$ et un $k>0$ tel que :
$\forall\, (t, y_1)$ et $(t, y_2) \in U$ avec y_1 et $y_2 \in B_E(y_0, \beta)$ on ait que

$$\left\| f(t,y_1) - f(t,y_2) \right\|_E \leq k.\left\| y_1 - y_2 \right\|_E \leq k.\left[\left\| y_1 - y \right\| + \left\| y_2 - y \right\| \right] \leq k.2\beta .$$

Posons M = 2. k. β.
Comme U est un ouvert et que (t_0, y_0) est dedans, il existe un $\alpha>0$ tel que la boule

$$B_{\mathbf{R}\times E}(\, (t_0, y_0)\, , \alpha\,) = \left\{ (t,y) \in R \times E \quad \text{tel} \quad \text{que} \quad \mathrm{Max}\left(|t - t_0|, \left\| y - y_0 \right\| \right) \leq \alpha \right\}$$ soit dans U.

On note alors $h = \mathrm{Inf}\left(\alpha, \dfrac{\beta}{M}\right)$.

Il est alors clair que f est k-lipschitzienne sur $]t_0-h;t_0+h[\times B_E(y_0, \beta)$.
Dans la suite, nous appellerons J l'intervalle $]t_0-h;t_0+h[$.

Notons $\xi = C^0(J, \overline{B_E(y_0,\beta)})$ l'ensemble des applications continues de J dans $\overline{B_E(y_0,\beta)}$.

ξ est un espace métrique pour la norme $\| \ \|_\infty : \xi \longrightarrow R^+$.

$$f \longrightarrow \sup_{t\in J} \|f(t)\|_E$$

De plus pour cette norme (et la distance qu'elle induit), ξ est complet. Montrons-le !
Prenons $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ est une suite de cauchy dans ξ .
Comme pour tout $t\in J$ $(f_n(t))_{n\in \mathbf{N}}$ est une suite de cauchy du E qui est complet donc cette dernière converge est convergente.

On désigne alors par f la fonction $f: J \to E$
$$t \to \lim_{n\to+\infty} f_n(t).$$

Comme $\overline{B_E(y_0,\beta)}$ est un fermé de E, il est clair que $f(J)\subset\overline{B_E(y_0,\beta)}$.
Reste à montrer que f est continue. Pour cela, on va utiliser la convergence dur tout compact K de J.
Soit donc K un compact de J.
Soit $\varepsilon>0$. Comme $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $n_0\in \mathbf{N}$ tel que pour tout n et $p\geq n_0$, $\forall t\in J$ on ait que :
$$\|f_n(t) - f_m(t)\|_E \leq \varepsilon.$$
Or pour tout $n\in \mathbf{N}$, on a que :
$$\|f_n(t) - f(t)\|_E = \lim_{m\to+\infty} \|f_n(t) - f_m(t)\|$$
Cela car comme nous le verrons avec le lemme 3.1, la distance est une continue !
En particulier si $n\geq n_0$ comme $\forall m\geq n_0$,
$$\|f_n(t) - f_m(t)\|_E \leq \varepsilon$$
Par passage à la limite par rapport à m, il vient que :
$$\|f_n(t) - f(t)\|_E \leq \varepsilon.$$
Si on récapitule donc, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $n_0\in \mathbf{N}$ tel que $\forall n\geq n_0$, $\forall t\in K$:
$$\|f_n(t) - f(t)\|_E \leq \varepsilon.$$
Comme pour tout $n\in \mathbf{N}$, f_n est continue sur J et comme la convergence de $(f_n)_{n\in \mathbf{N}}$ vers f est uniforme sur tout compact de J, il vient que f est alors continue sur J.
Autrement dit f fait partie de ξ.
Donc ξ est l'espace métrique complet que nous annoncions qu'il était !

On note alors $F = \{u\in\xi \text{ tel que } u(t_0) = y_0\}$.

Si on note $\phi : \xi \to E$, il est plus que clair que ϕ est continue sur ξ.
$u \to u(t_0)$
Comme $F = \phi^{-1}(\{y_0\})$, F est donc fermé dans ξ qui rappelons-le est complet. Par suite, F est donc lui-aussi complet.
On définit alors l'application $\varphi : F \to F$ par :

$$\varphi : u \to \varphi(u) : J \longrightarrow E \quad .$$
$$t \longrightarrow y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s)).ds$$

Il est clair que pour tout $u\in F$, $\varphi(u)$ est continue sur J et de plus $\varphi(u).(t_0) = y_0$.
De même :

$$\|\varphi(u).(t)-y_0\|_E \le \left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,u(s))\|.ds\right| \le M.|t-t_0| \le M.h \le \beta .$$

D'où $\varphi(u).(J)\subset \overline{B_E(y_0,\beta)}$. Ainsi $\varphi(u)$ est-il dans F ce qui assure que φ est bien définie sur F.

Ayant tout cela, pour tout u et $v\in F$, on peut écrire que :

$$\forall t\in J, \qquad \|\varphi(u).(t)-\varphi(v).(t)\|_E \le \left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\|.ds\right|$$

d'où comme f est k-lipschitzienne en y sur $J\times B_E(y_0, \beta)$,

$$\|\varphi(u).(t)-\varphi(v).(t)\|_E \le k.\left|\int_{t_0}^{t}\|u(s)-v(s)\|.ds\right| \le k.|t-t_0|.\|u(s)-v(s)\|_E$$

Finalement, il vient que pour tout $t\in J$,

$$\|\varphi(u).(t)-\varphi(v).(t)\|_E \le k.h.\|u-v\|_\infty$$

Ce qui se traduit aussi par :

$$\|\varphi(u)-\varphi(v)\|_\infty \le k.h.\|u-v\|_\infty .$$

Autrement dit φ est continue sur F.

De plus $h \le \dfrac{\beta}{M}$ d'où $k.\,h \le k.\,\dfrac{\beta}{2.k.\beta} = \dfrac{1}{2}$.

Autrement dit φ est $\dfrac{1}{2}$-contractante sur F qui est un espace métrique complet.

En application du théorème du point fixe 3.2, il existe un et un seul $u\in F$ tel que :

$$u = \varphi(u).$$

En dérivant sur J, il vient alors que pour tout $t\in J$, $u'(t) = f(t, u(t))$ et que $u(t_0) = y_0$.

Donc la première partie du théorème est prouvée. Reste à établir l'assertion complémentaire.

Si $v: O \to E$ et $w: O' \to E$ sont deux solutions de cette équation différentielle (donc dans $S_{(t_0,y_0)}$), on a alors que $O\cap O'$ est un ouvert non vide de **R** contenant t_0.
Là-encore, en faisant intervenir le même genre de démonstration mais en raisonnant sur l'ouvert $O\cap O'$, on montre que en utilisant le théorème du point fixe que :

$$\forall t\in O\cap O', \; v(t) = w(t).$$

D'où l'unicité locale de la solution.

Et le théorème de Cauchy-Lipschitz !

Histoire de solutions maximales : une tentative d'explication !

Par ce qui précède $S_{(t_0,y_0)}$ est déjà un ensemble non vide. Nous allons montrer qu'il admet un élément maximal et un seul d'où découlera le corollaire que nous donnerons alors.
Pour décrire $S_{(t_0,y_0)}$, nous décidons d'indexer ses éléments sur un ensemble A afin d'en faire une famille.

Ainsi note-t-on que $S_{(t_0,y_0)} = \left(\varphi_\alpha : I_\alpha \longrightarrow E\right)_{\alpha\in A}$.

On pose alors que $I = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$.

Il est clair que I est un intervalle de **R**.
En effet si a et b sont dans I alors il existe α et $\beta \in A$ tels que $a\in I_\alpha$ et $b\in I_\beta$. Or t_0 est dans chacun de ses deux intervalles.
Ainsi a-t-on un "chemin" allant de a à t_0 dans I_α et un autre allant de b à t_0 dans I_β. On a alors un chemin allant de a à b dans I. Par suite I est donc connexe par arcs donc comme c'est dans **R**, il est connexe. Or les connexes de **R**, nous les connaissons, c'en sont les intervalles ce qui fait donc de I, l'intervalle que nous annoncions qu'il était.
On définit alors l'application $\varphi : I \to E$ définie par si $x\in I$, comme il existe alors un $\alpha\in A$ tel que $x\in I_\alpha$:

$$\varphi(x) = \varphi_\alpha(x).$$

On remarquera qu'en application du théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout α et $\beta\in A$ tels que $x\in I_\alpha \cap I_\beta$, on a que :

$$\varphi(x) = \varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x).$$

Donc φ est parfaitement définie et surtout sans ambiguïté.

Cette application $\varphi : I \to E$ est un élément maximal de $S_{(t_0,y_0)}$.
Ceci car si $\phi : J \to E$ est dans $S_{(t_0,y_0)}$ alors d'une part $J \subset \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha = I$ et de l'autre par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a que sur $J\cap I = I$, $\phi = \varphi$.
Donc $\phi \Re \varphi$.
Ce qui fait de $\varphi : I \to E$ un élément maximal total (sous-entendu que tout le monde lui est inférieur pour notre relation d'ordre $\Re$) de $S_{(t_0,y_0)}$.
Ce qui assure son unicité car l'ordre est total.

Ainsi pour terminer voilà le corollaire que nous annoncions tout à l'heure. Pour certains c'est l'énoncé officielle du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Corollaire : Soit E un espace de Banach et U un ouvert de $\mathbf{R}\times E$.

Si $(t_0, y_0)\in U$ et si $f : U \to E$ est une fonction continue sur U et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable(celle dans E) alors l'équation différentielle $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une solution maximale et une seule.

Ce qui achève ce paragraphe et la partie que nous qualifierons d'intéressante du théorème de Cauchy-Lipschitz.

3°) Quelques outils bien utiles !

A défaut d'être un module lunaire, un lemme est un énoncé permettant de démontrer un résultat jugé plus important que l'on appelle théorème.

Le lemme ci-dessous entre dans la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz qui est l'objet de cet exposé.

Lemme 3.1 : $(M, \boldsymbol{d})$ est un espace métrique où $\boldsymbol{d}$ est une distance définie sur M.
Si (x_n) et (y_n) sont deux suites de M ayant pour limites x et y <u>alors</u> $\boldsymbol{d}(x, y) = \lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{d}(x_n, y_n)$

Autrement écrit, la distance $\boldsymbol{d}$ est continue sur l'espace métrique $M \times M$.

La preuve : *toute accusation portée doit être prouvée. Il en va de même pour les énoncés mathématiques.*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire que :

$$\boldsymbol{d}(x_n, y_n) \leq \boldsymbol{d}(x_n, x) + \boldsymbol{d}(x, y) + \boldsymbol{d}(y, y_n) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{d}(x, y) \leq \boldsymbol{d}(x_n, x) + \boldsymbol{d}(x_n, y_n) + \boldsymbol{d}(y_n, y).$$

Il vient alors que :

$$\boldsymbol{d}(x, y) - \boldsymbol{d}(x_n, y_n) \leq \boldsymbol{d}(x_n, x) + \boldsymbol{d}(y_n, y) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{d}(x_n, y_n) - \boldsymbol{d}(x, y) \leq \boldsymbol{d}(x_n, x) + \boldsymbol{d}(y_n, , y).$$

Si ce n'est toi, c'est donc ton frère ! Ainsi vient-il que :

$$\left|\boldsymbol{d}(x, y) - \boldsymbol{d}(x_n, y_n)\right| \leq \boldsymbol{d}(x_n, x) + \boldsymbol{d}(y_n, y).$$

Or une distance c'est continue !

Aussi a-t-on que $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{d}(x, x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{d}(y, y_n) = 0$.

Par suite, il vient alors que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\boldsymbol{d}(x, y) - \boldsymbol{d}(x_n, y_n)\right| = 0$$

Et donc finalement :

$$\boldsymbol{d}(x, y) = \lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{d}(x_n, y_n)$$

A propos des théorèmes des points fixes.

On ne dit pas <u>le</u> théorème du point fixe mais <u>les</u> théorèmes. En effet, plusieurs énoncés portent aujourd'hui ce titre. Certains sont plus adaptés que d'autres à certaines situations.

La version la plus classique de ces théorèmes sert dans la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz. Enonçons-la !

Théorème du point fixe 3.2 : E est un espace de Banach (c'est-à-dire un vectoriel normé complet).
Si la fonction $f : E \to E$ est une application contractante sur E <u>alors</u> f admet un unique point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un et un seul point x tel que :

$$f(x) = x.$$

De plus toute suite itérée (a_n) de E définie pour tout entier n par $a_{n+1} = f(a_n)$ converge vers x.

Mais c'est quoi au juste une application contractante ?

Dire qu'une application $f : E \to E$ est <u>contractante</u> signifie qu'il existe un réel $k \in [0 ; 1[$ tel que :

pour tout x et y de E, on a $\left\|f(x) - f(y)\right\|_E \leq k.\left\|x - y\right\|_E$.

Pour note sachez qu'il existe d'autres preuves du théorème de Cauchy-Lipschitz s'appuyant elles-aussi sur un théorème du point fixe...