Ce cours a été rédigé en novembre 1994 alors que je préparais l'agrégation de mathématiques et mis à jour en juin et juillet 2001. Dans le cas où il comporterait des erreurs, merci de me les signaler.
Il est exclusivement mis en ligne par le site "la taverne de l'Irlandais" (http://www.tanopah.com).
Ce cours est du niveau Math Spé / début de Licence.

De la réduction des endomorphismes

Au sommaire :

1°) Des généralités.

Dans tout ce qui suit **K** désignera un corps quelconque et E un espace vectoriel sur **K** de dimension quelconque et donc non nécessairement finie. On parlera à ce sujet de **K**-ev.

Rappelons qu'un endomorphisme de **K**-ev est une application **K**-linéaire d'un **K**-ev sur lui-même !
On notera L(E) la **K**-algèbre des endomorphismes sur E.
De plus si A est un sous-ensemble de E et $u \in L(E)$, alors :

- Dire que A est <u>stable</u> par u signifie que $u(A) \subset A$.
- Dire que A est <u>invariant</u> par u signifie que $u(A)=A$.

Proposition 1.1 : Si u et v sont deux endomorphismes de E et qu'ils commutent (c'est-à-dire uov = vou) <u>alors</u> Ker(u) et Im(u) sont stables par v.

En effet si $x \in Ker(u)$ alors $u(x) = 0$ d'où $u(v(x)) = v(u(x)) = 0$ d'où $v(x) \in Ker(u)$.
De plus si $x \in Im(u)$ alors $\exists\, y \in E$ tel que $u(y) = x$. C e qui donne que $v(x) = v(u(y)) = u(v(y))$.
Donc $v(x) \in Im(u)$.

Polynômes d'endomorphismes.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans **K**. On appelle n le degré de P. On conviendra que :

$$P = \sum_{i=0}^{n} ai.X^{i} .$$

Pour tout endormphisme u sur E et pout tout entier naturel k, la <u>puissance k-ième de l'endormorphisme</u> est l'endormorphisme défini par :

$$u^{k} = \underbrace{u \circ u \circ .... \circ u}_{k \ fois}$$

La puissance 0 de l'endomorphisme u est l'application identique sur E notée Id_E.

Ayant définie la puissance entière d'un endomorphisme, il est possible de parler d'image de celui-ci par un polynôme P.
P(u) est l'endomorphisme de E défini par :

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} a_{i}.u^{i} .$$

Notons **K**[u] l'ensemble des polynômes d'endomorphismes obtenus à substituant à l'indéterminée X l'endomorphisme u.
K[u] est une sous-**K**-algèbre unitaire et commutative (pour la composition) de l'algèbre (L(E), +, o, .).

Dire que $P \in \mathbf{K}[X]$ est un <u>polynôme annulateur</u> de u signifie que $P(u) = 0$ (C'est-à-dire l'application nulle).

L'ensemble des polynômes annulateurs de u forment un idéal de **K**[X].
Comme K est un corps, **K**[X] est alors un anneau principal. Tout idéal de celui-ciest donc monogène. Il existe un $P \in K[X]$ engendrant cet idéal.
Ce P est unique à la multiplication par un élément de **K** près.
Pour fixer les idées, on prend P unitaire. Ce dernier est alors appelé (s'il est non nul) <u>polynôme minimal</u> de u. On notera m_u ce polynôme.

En dimension finie ce polynôme existe toujours et il est toujours non nul.
En effet si ce n'était pas le cas, il existerait un $x \in E$ tel qur $\forall P \in K[X] \backslash \{0\}$ $P(u).(x) \neq 0_E$.
Autrement dit pour tout entier k la famille $\left(u^i(x)\right)_{i \in \{0..k\}}$ constituerait une famille libre à k-éléments.
Ce qui dans un K-ev de dimension finie ferait légèrement désordre. . .

De plus si u admet un polynôme minimal (sous-entendu non nul) alors on appelle <u>spectre</u> de l'endomorphisme u encore noté Sp(u) l'ensemble des valeurs propres de u.

Il est clair que si u et $v \in L(E)$ commutent alors $\forall$ P et $Q \in K[X]$, P(u) et Q(u) commutent. Tout cela se passant dans L(E).

Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres.
Soit $u \in L(E)$. On dit alors que :
- Dire que $x \in E \backslash \{0_E\}$ est un <u>vecteur propre</u> de u signifie qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda.x$.
  On dit alors que λ est la valeur propre associée à x.
- Si λ est une <u>valeur propre</u> pour u alors l'ensemble $\{x \in E$ tel qur $u(x) = \lambda.x\}$ qui est aussi $Ker(u - \lambda.Id_E)$. C'est le <u>sous-espace propre</u> associé à la valeur propre λ.
  Dans la suite, on notera E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Comme on le verra plus tard, toute valeur propre de u annule le polynôme caractéristique de u.

Par ce qui a été dit précédemment si u et $v \in L(E)$ commutent alors tout sous-espace propre de u est stable par v (et vis et versa).

2°) Théorèmes de décomposition des noyaux d'Hilbert/Dirac et de Cayley-Hamilton.

Dans ce paragraphe, nous allons énoncer et prouver les théorèmes essentiels sur lesquels s'appuient tout ce qui suivra.

Théorème 2.1 de décomposition des noyaux.
Soit Q et R $\in$ **K**[X] deux polynômes premiers entre eux. On appelle P leur produit.

Si $u \in L(E)$ alors $\text{Ker } P(u) = \text{Ker } Q(u) \oplus \text{Ker } R(u)$.

La preuve : *Nous avons deux choses à prouver : d'abord une somme directe puis une égalité d'ensembles.*

Pour commencer on va montrer que cette somme est directe.
Si $x \in \text{Ker } Q(u) \cap \text{Ker } R(u)$ alors $Q(u).(x) = R(u).(x) = 0$.
Comme **K**[X] est un anneau principal et que $\text{Pgcd}(Q, R) = 1_K$, en application du théorème de Bezout il existe deux polynômes U et V $\in$ K[X] tel que $U.Q + V.R = 1_K$.
Il vient donc que :

$$U(u)oQ(u)+V(u)oR(u) = Id_E.$$

Et plus particulièrement pour notre x, il vient que :

$$x = U(u)oQ(u).(x) + V(u)oR(u).(x)$$

Or $Q(u).(x) = R(u).(x) = 0$.
Par suite il vient donc que $x = 0$.
D'où $\text{Ker } Q(u) \cap \text{Ker } R(u) = \{0\}$.
Autrement dit la somme de Ker Q(u) et de Ker R(u) est directe.
C'est-à-dire ce qu'on voulait !

Montrons à présent l'égalité des deux s-ev de E. Comme dirait le sage: "Montrer une égalité, c'est montrer une double inclusion !"

($\subset$) : Soit $x \in \text{Ker } P(u)$. Par ce qui précède, on peut écrire que :

$$x = Q(u).(U(u).(x)) + R(u).(V(u).(x)).$$

On appelle x_1 le premier terme de cette somme et x_2 le second.
On peut écrire que :

$$R(u).(x_1) = P(u)oU(u).(x) = U(u)oP(u).(x) = 0$$

donc $x_1 \in \text{Ker } R(u)$.

De même : $Q(u).(x_2) = P(u)oV(u).(x) = V(u)oP(u).(x) = 0$ d'où $x_2 \in \text{Ker } Q(u)$.
Et cela car tout commute ! (Voir fin du premier paragraphe).
Ainsi $x = x_1 + x_2$ fait-il partie nécessairement de $\text{Ker } Q(u) \oplus \text{Ker } R(u)$.

($\supset$) : Si $x \in \text{Ker } Q(u)$ alors $P(u).(x) = R(u).(Q(u).(x)) = 0$.
Ainsi Ker Q(u) est-il inclus Ker P(u). Il en va de même pour Ker R(u).
Combinant ces deux choses, il vient que :

$$\text{Ker } Q(u) \oplus \text{Ker } R(u) \subset \text{Ker } P(u).$$

La double inclusion nous donne l'égalité et par là-même le théorème !

On peut facilement généraliser le théorème de décomposition des noyaux à un produit quelconque de polynômes premiers entre eux. Ainsi :

Corollaire 2.2 (théorème des noyaux généralisé).
Si $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ avec les Pi premiers entre eux deux à deux alors $\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} P_i$.

Polynôme caractéristique et théorème de Cayley-Hamilton.
Dans tout ce qui suit E sera de dimension finie que l'on notera n.
Soit $(e_i)_{i\in\{1..n\}}$ une base de E.
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u est noté χ_u et définit par :

$$\chi_u = \det\left[X.\mathrm{Id}_E - \mathrm{Mat}\left(u, (e_i)_{i\in\{1..n\}}\right)\right]$$

Le polynôme caractéristique de u ne dépend pas de la base choisie pour y exprimer sa matrice.
En effet si $(f_i)_{i\in\{1..n\}}$ est une autre base de E et que l'on note P la matrice de passage de $(e_i)_{i\in\{1..n\}}$ à celle-ci alors comme dans toute base la matrice d'Id_E est la matrice identité, on a que :

$$\begin{aligned}\det\left[X.\mathrm{Id}_E - \mathrm{Mat}(u,(f_i))\right] &= \det\left[P^{-1}.\ (X.\mathrm{Id}_n - \mathrm{Mat}(u,(e_i))).\ P\right]\\ &= \det(P)^{-1}.\ \det(P).\ \det\left[X.\mathrm{Id}_n - \mathrm{Mat}(u,(e_i))\right]\\ &= \det\left[X.\mathrm{Id}_n - \mathrm{Mat}(u,(e_i))\right]\end{aligned}$$

χ_u est un polynôme unitaire de degré n. De plus s'il est entièrement scindé, c'est-à-dire s'il a ses n racines comptées avec leur ordre de multiplicité dans K que l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alors on a que

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

où Tr est la trace de u (en fait de la matrice de u dans une certaine base).
On notera là encore la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie pour l'y exprimer.
Ceci car vu que pour toutes matrices A et B, Tr(A. B) = Tr(B. A.).
Quoiqu'il en soit, s'il est entièrement scindé et en conservant les mêmes notations, on a que :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) = X^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i . s_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) . X^{n-i}$$

où les s_j sont les polynômes symétriques élémentaires de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$.
En particulier le terme constant de χ_u est-il égal à $(-1)^n.\det(u)$.

De plus si λ est une valeur propre de u alors $\det\left[\lambda.\mathrm{Id}_n - \mathrm{Mat}(u,(e_i))\right] = 0$.
Ceci car E_λ n'est alors pas réduit à $\{0\}$.
Autrement dit λ est racine de χ_u le polynôme caractéristique de u.
Réciproquement si $\lambda \in \mathbf{K}$ est une racine de ce polynôme caractéristique χ_u alors $\det\left[\lambda.\mathrm{Id}_n - u\right] = 0$.
Donc l'endomorphisme $\lambda.\mathrm{Id}_E - u$ n'est pas injectif. Ce qui implique que λ est une valeur propre de u.
En résumé, nous avons l'équivalence :

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \Leftrightarrow \lambda \text{ est une racine de } \chi_u.$$

Théorème 2.3 de Cayley-Hamilton.
Tout endomorphisme annule son polynôme caractéristique.
Ainsi tout polynôme minimal d'un endomorphisme divise le polynôme caractéristique de celui-ci.

***La preuve :** La démonstration que nous ferons n'est valable qu'en dimension finie.*
Avant d'entamer la manoeuvre principale, nous allons prouver un petit lemme. Avant ceci, rappelons certaines choses.

E est un espace vectoriel sur **K** de dimension n.
$M_n(\mathbf{K})$ est la **K**-algèbre des matrices carrées à n lignes (donc n colonnes).

Si $M \in M_n(\mathbf{K})$ alors la comatrice de M notée Com(M) est la matrice formée des cofacteurs de M.
C'est-à-dire que $\forall$ i et j $\in \{1..n\}$:

$$\left(\mathrm{Com}(M)\right)_{i,j} = (-1)^{i+j}.\det(A_{i,j})$$

où $A_{i,j}$ est la matrice déduite de M en supprimant la ligne i et la colonne j.

La cotransposée de M est alors la transposée de la comatrice. On note souvent celle-ci $\tilde{\tilde{M}}$.

Le lemme qui nous aidera dans notre quête de l'éclatante vérité est le suivant :

Lemme : Si $(C_i)_{i\in\{0..n\}}$ et $(D_i)_{i\in\{0..n\}} \subset M_n(K)$ sont telles que dans l'anneau $M_n(K[X])$ l'on ait l'égalité $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} X^i.C_i = \sum_{i=0}^{n} X^i.D_i$ alors $\forall i \in \{0..n\}$ $C_i = D_i$.

Nous allons démontrer ce lemme.
Pour tout entier $k \in \{0..n\}$, on appelle $c_{i,j}(k)$ le coefficient de la ième ligne et de la jième colonne de la matrice C_k. Ainsi :

$$C_k = \left(c_{i,j}(k)\right)_{i \text{ et } j \in \{1..n\}}$$

De la même façon, $d_{i,j}(k)$ désigne le coefficient (i ; j) de la matrice D_k. Et là encore :

$$D_k = \left(d_{i,j}(k)\right)_{i \text{ et } j \in \{1..n\}}$$

On peut alors écrire que $\forall$ i et j $\in \{1..n\}$ dans **K**[X], on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} c_{i,j}(k).X^k = \sum_{k=0}^{n} d_{i,j}(k).X^k$$

Ce qui se traduit également par le fait que $\forall k \in \{0..n\}$,

$$\forall \text{ i et j} \in \{1..n\} \ c_{i,j}(k) = d_{i,j}(k)$$

Autrement dit $C_k = D_k$. C'est-à-dire le lemme que nous voulions !

Revenons maintenant à notre théorème. Notons M la matrice de u dans une base B quelconque de E.
On pose $T = X.\mathrm{Id}_n - M$.
Considérons $\tilde{\tilde{T}}$ la cotransposée de T.

Comme $\tilde{\tilde{T}}$ est une matrice carrée à n lignes on pose $\tilde{\tilde{T}} = (P_{i,\,j})_{i \text{ et } j \in \{1..n\}}$.

$P_{i,\,j}$ étant le déterminant d'une matrice d'ordre n-1 dont chacun des coefficients est un polynôme de degré au plus égal à 1, celui-ci est donc un polynôme de degré au plus égal à n-1.
Ceci compte tenu de ce qu'est le déterminant,
D'ailleurs $\forall$ i et j $\in \{1..n\}$ on écrit $P_{i,\,j}$ sous la forme :

$$P_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} c_{i,j}(k).X^k .$$

De plus $\forall$ k $\in$ {0. . n-1} on appelle C_k la matrice $\left(c_{i,\,j}(k)\right)_{i \text{ et } j \in \{1..n\}}$.

Il va sans dire que $C_k \in M_n(K)$.
On a alors que :

$$\tilde{\tilde{T}} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k.C_k .$$

Pour compléter la sauce on pose $C_0 = C_n = 0$ (Comprenez la matrice nulle).
Or le produit d'une matrice par la transposée de la comatrice donne le déterminant de cette matrice multiplié par Id_n.
Par suite vu que $\det[X.Id_n - u] = \chi_u$, il vient que :

$$\chi_u.Id_n = \tilde{\tilde{T}}.T = \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k.C_k\right)(X.Id_n - M) = \sum_{k=0}^{n} X^k.(C_{k-1} - C_k.M)$$

En application de notre lemme, si $\chi_u = \sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$ alors $\forall$ k $\in \{0..n\}$ $\quad Id_n = C_{k-1} - C_k.M$.

Ce qui s'exprime encore par :

$$M = \left(C_k - C_{k-1}.M\right).M$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k.M^k &= \sum_{k=0}^{n} (C_{k-1} - C_k.M).M^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}.M^k - \sum_{k=0}^{n-1} C_k.M^{k+1} \\ &= 0_{M_n(K)}\end{aligned}$$

Et donc finalement $\chi_u(u) = 0$.
C'est-à-dire que u annule son polynôme caractéristique et donc ce dernier est divisible par le polynôme minimal.

Note : Ce théorème n'est valable que lorsque E est de dimension finie. D'ailleurs la preuve a été faite dans le seul cas d'un **K**-ev de dimension finie.
Si Cayley-Hamilton était valable en dimension quelconque alors tout endomorphisme admettrait polynôme minimal non nul. Ce qui entre nous est loin d'être la cas.

En effet dans le **K**-espace vectoriel **K**[X], l'endomorphisme $u : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longrightarrow & P' \end{array}$ est loin d'admettre u un polynôme l'annulant.

Théorème 2.4 de Hilbert/Dirac.
Si λ est une valeur propre de u alors pour tout polynôme P, $P(\lambda)$ est une valeur propre de l'endomorphisme P(u).

Ce théorème aussi simple que puissant découle du fait que $\forall n \in \mathbf{N}\ u^n(x) = \lambda^n . x$.
A l'opposé du théorème de Cayley-Hamilton, il est valable en dimension quelconque.
Le théorème de Hilbert-Dirac conduit à ce que toute valeur propre pour un certain endomorphisme est racine de tout polynôme l'annulant.
Plus généralement, nos deux théorèmes sont valables sur tout A-module. La seule restriction à apporter l'est pour Cayley-Hamilton. Le A-module devant être de rang fini. Et A si possible principal, bien que là ce ne soit pas absolument nécessaire !

3°) Des endomorphismes diagonalisables et de leur diagonalisation.

Dans ce paragraphe E ne sera pas nécessairement de dimension finie.

Définition 3.1 : Dire que qu'un endomorphisme u de E est diagonalisable signifie que E est somme directe de ses sous-espaces propres.

Dans ce paragraphe, nous allons voir à quelles conditions sur son polynôme minimal ou son polynôme caractéristique, un endomorphisme est-il diagonalisable.

Ce qui en dimension finie équivaut au fait que E admette une base de vecteurs propres pour u.
Cela équivaut également au fait qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
De plus cette matrice est sur sa diagonale formée exclusivement de valeurs propres de u.

Réciproquement si u admet un polynôme minimal alors toute racine de m_u est une valeur propre de u.
En effet si λ est une racine de m_u qui est le polynôme minimal de u, alors il existe un polynôme Q de degré strictement inférieur à celui de m_u tel que :

$$m_u = (X-\lambda).\, Q\,.$$

De plus, comme m_u est le polynôme minimal de u alors Q n'annule pas u.
Autrement dit il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $Q(u).(x) \neq 0$.
De là vu que $m_u\,(u).(x) = 0$, il vient que :

$$(X-\lambda).(u).(Q(u).\,x) = u(Q(u).(x)) - \lambda.\,(\,Q(u).(x)) = 0.$$

Autrement dit Q(u). x qui est non nul est un vecteur propre de u pour la valeur propre qu'est λ. D'où ce qu'on voulait !

Ainsi si u admet un polynôme minimal m_u alors on a l'équivalence :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de u} \Leftrightarrow \lambda \text{ est une racine de } m_u.$$

Ce qui entre nous assure que pour tout endomorphisme admettant un polynôme minimal (ou même au moins un polynôme annulateur non nul) le nombre de vecteurs propres est fini.

Caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide de leur polynôme minimal.

Tour repose sur le théorème suivant qui est valable en dimension quelconque.

Théorème 3.2 : E est une **K**-espace vectoriel de dimension quelconque. u est un endomorphisme de E admettant un polynôme minimal. Alors il y a équivalence entre :
- (i) u est diagonalisable.
- (ii) Il existe un polynôme P scindé sur **K** (c'est-à-dire dont toutes les racines sont dans **K**) dont toutes les racines sont simples et annulant u.
- (iii) m_u le polynôme minimal de u est scindé sur **K** et n'a que des racines simples.

La preuve : *Afin d'établir l'équivalence entre les trois assertions, nous allons tourner en rond en les impliquant l'une par rapport à l'autre ! Illustration.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Si u est diagonalisable alors E est somme directe des sous-espaces propres de u.
C'est-à-dire que si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de u, on a alors que :

$$E = \mathrm{Ker}(\,u - \lambda_1.\mathrm{Id}_E\,) \oplus \ldots \oplus\ \mathrm{Ker}(\,u - \lambda_k.\mathrm{Id}_E\,)$$

Soit alors le polynôme P défini par :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$$

P est un polynôme scindé sur **K** et à racines simples.
De plus on a que :

$$P(u) = (u - \lambda_1 . Id_E) o \dots o (u - \lambda_k . Id_E)$$

Vu qu'il y a une somme directe, $\forall$ x$\in$E, $\forall$ i$\in$$\{1...k\}$ il existe un et un seul $x_i \in Ker(u - \lambda_i . Id_E)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

A partir de là, vu que si Q et R sont deux polynômes alors les endomorphismes Q(u) et R(u) commutent, il vient que $\forall$ i$\in$$\{1..k\}$

$$P(u).(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{k} (u - \lambda_j . Id_E) \; .(u(x_i) - \lambda_i . x_i) \;\; = \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{k} (u - \lambda_j . Id_E).(0)$$
$$= 0$$

Comme P(u) est une application **K**-linéaire, alors :

$$P(u).(x) = \sum_{i=1}^{k} P(u).(x_i) = 0$$

Ainsi P annule u d'où l'assertion (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Si P est un polynôme annulateur de u, scindé sur **K** et n'ayant que des racines simples alors par ce qui a été dit précédemment m_u divise P.
Donc les racines de m_u sont également des racines de P.
Autrement dit m_u est scindé sur **K** et n'a que des racines simples (si ce n'était pas le cas alors P ne pourrait être scindé et/ou n'avoir que des racines simples).

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Si m_u est scindé sur K et n'a que des racines simples alors m_u s'écrit sous la forme :

$$m_u = \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)$$

avec les λ_j deux à deux distinctes.
Autrement dit $\forall$ i et j $\in$ $\{1..k\}$ les polynômes X-λ_i et X-λ_J sont premiers entre eux si $i \neq j$.
En application du théorème 2.2 de décomposition des noyaux, il vient que :

$$Ker\ P(u) = E = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker \;\; (u - \lambda_j . Id_E) .$$

Or l'on a vu précédemment qu'il y avait équivalence entre λ racine de m_u et λ valeur propre de u.
Autrement dit E est somme directe des sous-espaces propres de u ce qui équivaut que u est diagonalisable.
Ce qui nous donne l'assertion (i).

Une assertion en impliquant une autre, nous avons démontré le théorème !

Caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide du polynôme caractéristique.
Ce sous-paragraphe ne concerne que les **K**-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 3.3 : E est **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Dire que l'endomorphisme u de E est diagonalisable équivaut à dire que son polynôme caractéristique χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ de u, la dimension du sous-espace propre associé à λ et noté E_λ est égale à la multiplicité λ pour χ_u . (i.e $\dim E_\lambda = m(\lambda)$).

Note : ce théorème a bien un sens car on a vu précédemment qu'il y avait équivalence entre λ racine de χ_u et λ valeur propre de u.

La preuve : *Pour démontrer l'équivalence de ce théorème, nous allons une double implication.*

($\Rightarrow$) : Si u est diagonalisable alors si on désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres alors il existe une base B de vecteurs propres pour u dans laquelle la matrice de u est diagonale et ne compte sur celle-ci que des valeurs propres de u. En clair :

$$\mathrm{Mat}(u,B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & & & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & & & & & & \\ & 0 & \lambda_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & 0 & & & & \\ & & & 0 & \ldots & 0 & & & \\ & & & & 0 & \lambda_k & 0 & & \\ & & & & & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & & & & & & & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Cette matrice s'écrit aussi si $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$ α_i désigne le nombre de fois que λ_i figure dans celle-ci :

$$\mathrm{Mat}(u,B) = \begin{pmatrix} \lambda_1.Id_{\alpha_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2.Id_{\alpha_2} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k.Id_{\alpha_k} \end{pmatrix}$$

De plus $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$ on a que :

$$\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$$

Par suite comme le polynôme caractéristique de u est indépendant de la base choisie pour exprimer la matrice de u, il vient alors que :

$$\chi_u = \det(X.Id_n - \mathrm{Mat}(u,B)) = \begin{pmatrix} (X-\lambda_1).Id_{\alpha_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (X-\lambda_2).Id_{\alpha_2} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & (X-\lambda_k).Id_{\alpha_k} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{\alpha_i} .$$

Autrement dit χ_u est scindé sur **K** et la multiplicité de chaque valeur propre de u est égale à la dimension du sous-espace propre attaché à celle-ci.
D'où cette première implication !

($\Leftarrow$) : Réciproquement si on a l'assertion de droite alors comme dans la preuve du théorème 3.3 quant on montre que (iii)$\Rightarrow$(i), la somme des sous-espaces propres de u est directe. Ceci à cause du théorème de décomposition des noyaux et de l'équivalence : λ valeur propre de u $\Leftrightarrow$ λ racine de χ_u.

Appelons F le sous-espace de E somme directe des sous-espaces propres de u. On peut dire que :

$$\dim(F) = \sum_{j=1}^{k} m(\lambda_j)$$

où si x est une racine de χ_u alors m(x) désigne la multiplicité de celle-ci.
Vu que χ_u est de degré n (la dimension de E), il vient alors que :

$$\dim(F) = n.$$

Or des sous-espaces vectoriels de E de même dimension que lui, il n'y en a qu'un : C'est E lui-même !
Autrement dit E est somme directe de ses sous-espaces propres.
Ce qui signifie encore que u est diagonalisable.
D'où la fin de notre calvaire !

Avant de conclure ce paragraphe, nous allons énoncer un dernier théorème valable en dimension finie. Il concerne les endomorphismes à spectre simple c'est-à-dire à ceux dont le spectre contient n éléments (distincts) si n est la dimension de E.

Théorème 3.4 : E est un **K**-espace vectoriel de dimension finie. u est un endomorphisme de E.
Si u est à spectre simple alors il est diagonalisable et chacun de ses sous-espaces propres est une droite vectorielle (c'est-à-dire un **K**-sev de dimension 1).

Que u soit diagonalisable découle du fait que χ_u est un polynôme annulateur de u ayant n racines distinctes. C'est d'ailleurs par la même occasion le polynôme minimal !
La dimension des sous-espaces propres nous est donné par le précédent théorème 3.3.

4°) Des endomorphismes trigonalisables et de leur trigonalisation.

Dans tout ce qui suit E sera nécessairement un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Au terme "trigonalisation", certains préfèrent le mot "triangularisation".

Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Pour tout entier naturel k, on note $E_{\lambda,k}$ le noyau de l'endomorphisme $(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^k$ c'est-à-dire l'endomorphisme $u - \lambda.\mathrm{Id}_E$ composé k fois.
En clair on a donc que :

$$E_{\lambda,k} = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^k$$

La suite $(E_{\lambda,k})_{k\in\mathbf{N}}$ ainsi formée est une suite croissante pour l'inclusion.
Fastoche à vérifier comme il s'agit d'endomorphisme !
De plus cette suite est stationnaire. Si ce n'était pas le cas on pourrait extraire de cette suite une sous-suite $(E_{\lambda,k_j})_{j\in N}$ tel que $\dim E_{\lambda,kj} < \dim E_{\lambda,k_{j+1}}$.

Autrement dit pour tout entier naturel p, on pourrait construire un sous-espace de E de dimension p.
Or E est de dimension finie et il coiffe tout ce petit monde. Donc notre suite est nécessairement stationnaire.
On note alors $F_\lambda(u)$ le sous-espace défini par :

$$F_\lambda(u) = \bigcup_{k\in N} E_{\lambda,k}$$

Autrement dit c'est la limite de notre suite.
$F_\lambda(u)$ est alors ce que l'on appelle le <u>sous-espace caractéristique</u> de u pour le scalaire λ.

Note : A l'instar des sous-espaces propres, on abrège souvent $F_\lambda(u)$ par F_λ lorsque l'endomorphisme suggéré ne fait pas de doute.

Si $F_\lambda(u)$ est non réduit à $\{0\}$ alors λ est une valeur propre de u.
En effet si l'espace $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left(u - \lambda.\mathrm{Id}_E\right)$ était égal à $\{0\}$ alors $\forall\ x \in E\backslash\{0\}\ \ u(x) - \lambda.x \neq 0$.
Donc pour tout entier naturel k, l'espace $E_{\lambda,k}$ serait réduit à $\{0\}$.
Ce qui impliquerait notamment que $F_\lambda(u) = \{0\}$.

Réciproquement si λ est une valeur propre de u alors comme $E_\lambda(u) \subset F_\lambda(u)$ alors $F_\lambda(u)$ est non réduit à $\{0\}$.
En résumé, nous avons donc établi l'équivalence suivante :

$$F_\lambda(u) \text{ est non réduit à } \{0\} \iff \lambda \text{ est une valeur propre de u.}$$

Dans ces cas là, on dit que F_λ est le <u>sous-espace caractéristique ou spectral</u> de u associé ou rattaché à la valeur propre λ.
Le plus petit entier k tel que $E_{\lambda,k} = F_\lambda$ est <u>l'indice</u> de la valeur propre λ.

Cet indice n'est en fait, rien d'autre que la multiplicité de la valeur propre λ dans m_u, le polynôme minimal de u. On notera celle-ci $n(\lambda)$.
Montrons ce résultat !
Montrons d'abord que $n(\lambda) \geq k$.

Appelons u_λ l'endomorphisme induit par u sur F_λ. En clair, $u_\lambda = u_{|F_\lambda}$.

Le polynôme minimal de u_λ divise celui de u. Ceci car $m_u(u_\lambda) = 0$ et tous les idéaux de K[X] sont monogènes.

Comme $F_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^k$, on peut alors écrire que $(X - \lambda)^k$ est le polynôme minimal de u_λ. Ceci à cause du choix de k.

Par suite, $(X - \lambda)^k$ divise nécessairement m_u.Donc k ne peut excéder la multiplicité de la racine λ. Donc $n(\lambda) \geq k$.

Supposons à présent que $n(\lambda)$ soit strictement supérieur à k.
On aurait alors que :

$$\mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^k = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^{n(\lambda)}$$

De plus, il existerait un polynôme non nul Q tel que $m_u = (X - \lambda)^{n(\lambda)}.Q$

De part son constitution, Q serait premier avec $(X - \lambda)^{n(\lambda)}$ et donc aussi avec $(X - \lambda)^k$.

On aurait alors que les sommes $\mathrm{Ker}\,Q(u) + \mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^{n(\lambda)}$ et $\mathrm{Ker}\,Q(u) + \mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^k$ seraient directes.
La première est égale à $\mathrm{Ker}\,m_u$ c'est-à-dire E.

De plus vu que $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^{n(\lambda)} = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^k$, il viendrait que la seconde somme serait aussi égale à E.

Autrement dit en la personne de $(X - \lambda)^k.Q$, nous aurions trouvé un polynôme annulateur de u de degré inférieur à celui de m_u, le polynôme minimal de u.
Ce qui n'est hélas pas possible !
Par suite il vient donc que k n'est pas strictement inférieur à $n(\lambda)$ et donc que :

$$n(\lambda) = k.$$

C'est-à-dire ce qu'on voulait !

De plus si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les valeurs propres de l'endomorphisme u alors la somme de tous les sous-espaces caractéristiques qui y sont attachés, est directe.
En effet comme toutes ses valeurs propres sont distinctes alors pour tous entiers naturels non nuls p et q, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, k\}$ avec $i \neq j$ les polynômes $(X - \lambda_i)^p$ et $(X - \lambda_j)^q$ sont premiers entre eux.
En particulier lorsque p et q sont des indices de valeur propre, par le théorème 2.2 de décomposition des noyaux, il vient que la somme $\bigoplus_{i=1}^{k} F_{\lambda_i}$ est directe.

Ce qui s'exprime encore que les sous-espaces $F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_k}$ sont linéairement indépendants entre eux.

A présent, nous pouvons définir ce qu'est un endomorphisme trigonalisable.

Définition 4.1 : E est **K**-espace vectoriel.
Dire que l'endomorphisme u de E est trigonalisable signifie que E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.

On notera que la notion d'endomorphisme trigonalisable n'est en général pas extensible en dimension quelconque.
Si toutefois les sous-espaces caractéristiques sont pour une raison de dimension finie, il serait alors envisageable de définir la notion en question.

Si u n'est pas trigonalisable alors sur chacun de ses sous-espaces caractéristiques F_λ, cet endomorphisme u s'écrit sous la forme :

$$u = \lambda.\mathrm{Id}_{F_\lambda} + v_\lambda$$

où v_λ est un endomorphisme de F_λ nilpotent d'indice k.

Il en est ainsi car en posant $v_\lambda = u - \lambda.\mathrm{Id}_{F_\lambda}$, on montre que $v_\lambda{}^k = 0$ du fait de la définition même de F_λ.

Ainsi :

Si u est trigonalisable alors v_λ est nilpotent d'ordre n(λ).

Enfin, comme u et $(u - \lambda.\mathrm{Id}_E)^k$ commutent, alors F_λ est stable par u.

Toutes les éléments préliminaires ayant été abordés, nous allons voir comment caractériser un endomorphisme trigonalisable à partir de son polynôme minimal puis à partir de son polynôme caractéristique.

Caractérisation des endomorphismes trigonalisables à l'aide du polynôme minimal.

Tout repose sur le théorème suivant que voici :

Théorème 4.2 : E est un **K**-espace vectoriel de dimension finie. u est un endomorphisme de E.
Il y a équivalence entre :
(i) u est trigonalisable.
(ii) Il existe un polynôme annulateur de u qui est scindé sur **K**.
(iii) m_u est scindé sur **K**.

La preuve : *Pareillement à ce qui a été fait pour le théorème 3.2 analogue de diagonalisation, nous allons établir un cercle de trois implications.*

(i) ⇒ (ii) : Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ les valeurs propres de u. On supposera les avoir pris distinctes !
On appelle alors $k_1, \ldots, k_l$ les indices respectifs de ces valeurs propres.

Intéressons-nous au polynôme $P(X) = \prod_{j=1}^{l} (X - \lambda_j)^{k_j}$.

On peut écrire que pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, on a : $\forall x \in F_{\lambda_j} \quad (u - \lambda_j.\mathrm{Id}_E)^{k_j}.(x) = 0$

Donc $\forall x \in F_{\lambda_j}, \quad P(u).(x) = 0$.

Par suit,e P(u) étant un endomorphisme de E et E étant somme directe de ses sous-espaces caractéristiques, il vient que :

$$\forall x \in E, \quad P(u).(x) = 0.$$

Autrement dit, P est un polynôme annulateur de u qui est scindé d'où (ii).

(ii) ⇒ (iii) : On a alors que m_u divise P un polynôme annulateur de u qui est scindé sur **K**. Nécessairement on a alors que m_u est scindé.

(iii) ⇒ (i) : Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sont les valeurs propres de u, on a alors compte tenu de ce qui a été dit précédemment et vu que m_u est scindé, les racines de m_u sont les valeurs propres de u et m_u s'écrit :

$$m_u = \prod_{j=1}^{l} (X - \lambda_j)^{n(\lambda_j)} .$$

Là-dessus vu que $(X - \lambda_j)^{n(\lambda_j)}$ et $(X - \lambda_i)^{n(\lambda_i)}$ sont premiers entre eux si i≠j, en application du théorème 2.2 de décomposition des noyaux, il vient que Ker P(u) c'est-à-dire E est somme directe des $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_j.\mathrm{Id}_E)^{n(\lambda_j)}$ avec j compris entre 1 et l.

Or on a vu précédemment que $n(\lambda_j)$ n'est rien d'autre que l'indice de la valeur propre de u, c'est-à-dire notre k_j.

Autrement dit $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda_j.\mathrm{Id}_E)^{n(\lambda_j)} = F_{\lambda_j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$.

Donc E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.
Ainsi u est-il trigonalisable.

Le cercle implicatif étant bouclé, notre démonstration est terminée !

Pour note, si **K** est un corps algébriquement clos comme **C**, alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Trigonalisation des endomorphismes nilpotents, matrices triangulaires et endomorphismes trigonalisables.
Avant toute chose, nous devons rappeler ce qu'est un endomorphisme nilpotent.

Définition 4.3 : Dire que l'endomorphisme u de l'espace vectoriel E est nilpotent signifie qu'il existe un entier naturel k tel que $u^k = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{k\ fois}$ soit l'application nulle.
Le plus petit entier naturel k tel que $u^k = 0$ est ce que l'on appelle l'indice de nilpotence de u.

Il est possible de caractériser matriciellement les endomorphismes nilpotents.

Théorème 4.4 : E est un **K**-espace vectoriel.
Dire que l'endomorphisme u de E est nulpotent équivaut à dire qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u soit triangulaire supérieur nilpotente. (Autrement dit les éléments diagonaux de celle-ci sont tous nuls).

La preuve : *Pour démontrer ce théorème, nous avons une double implication à établir.*

(⇒) : Cette implication, nous allons la faire par récurrence sur n la dimension de E.

Pour n = 1 : si u est nilpotent alors la matrice de u dans une certaine base est de la forme (a) avec $a \in$ **K**.
Or nous savons qu'il existe un entier k tel que $u^k = 0_E$. Nécessairement, on a alors que $a^k = 0$.

K étant un corps intègre, a est donc nécessairement nul.
Autrement dit, ce que l'on voulait !

<u>Au rang n :</u> Supposons que l'implication vraie pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à n.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u l'un de ses endomorphismes nilpotent de E d'indice k.
On a alors que dans n'importe quelle base B :

$$0 = \det\left[\mathrm{Mat}\left(u^k\ ,\ B\right)\right] = \left(\det\left[\mathrm{Mat}(u, B)\right]\right)^k$$

Autrement dit, le déterminant de la matrice de u dans toute base B est nul.
Donc u n'est pas injective. Autrement dit il existe $x \in \mathrm{Ker}\, u$ qui est non nul.
Comme E est de dimension finie et égale à n , par le théorème de la base incomplète, il existe des éléments $e_2,....,e_n$ tel que $\{x, e_2,....,e_n\}$ soit une base de E.
Appelons-la B. La matrice de u dans cette base est alors :

$$\mathrm{Mat}(u,B) = \begin{pmatrix} 0 & B' \\ \vdots & \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où B' est une matrice ligne à n-1 colonnes et A une matrice carrée à n-1 lignes.
Or nous savons que :

$$\mathrm{Mat}(u, B)^k = 0.$$

Avant d'aller plus loin, nous devons établir certaines choses.
Si l'on multiplie deux matrices, on a alors que:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.A'+B.C' & A.B'+B.D' \\ C.A'+D.C' & C.B'+D.D' \end{pmatrix}$$

Note : Ici A, B, C, D, A', B', C' et D' sont des matrices quelconques sans rapport avec celles de notre manoeuvre.
Cette égalité est valable pour A et A'$\in \mathrm{M}_{p,p}(\mathbf{K})$ *, B et B'*$\in \mathrm{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$ *, C et C'*$\in \mathrm{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})$
et D et D'$\in \mathrm{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})$.

Utilisant cette remarque, on montre par récurrence sur m que $\mathrm{Mat}(u, B)^m$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B_m \\ \vdots & \\ 0 & A^m \end{pmatrix}$ avec $B_m \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$.
Pour m=1, c'est assez évident !
Pour m+1 : supposons l'assertion vraie au rang m. On peut alors écrire:

$$\mathrm{Mat}(u,B)^{m+1} = \begin{pmatrix} 0 & B' \\ \vdots & \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & B_m \\ \vdots & \\ 0 & A^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B'.A^m \\ \vdots & \\ 0 & A^{m+1} \end{pmatrix}$$

D'où ce que nous avancions !

En particulier pour m=k, on a nécessairement que $A^k = 0$.
Autrement dit, A qui est la matrice d'un endomorphisme v sur le sous-espace $F = \mathrm{Vect}(e_2,....,e_n)$ est nilpotente.
Or F est un espace de dimension n-1.
En application de l'hypothèse de récurrence, on peut trouver une base B' de F dans laquelle la matrice de v soit triangulaire supérieure.
Par suite, la matrice de u dans la base de E qu'est $\{x\} \cup B'$ est une matrice triangulaire supérieure qui est donc nilpotente.

D'où ce qu'on voulait !

($\Leftarrow$) : Réciproquement s'l existe une base B de E dans laquelle la matrice de u soit triangulaire supérieure mais surtout nilpotente, il est bien clair que pour un certain entier naturel k (le même que la matrice), on a que :

$$u^k = \underbrace{u \circ \ldots. \circ u}_{k\ fois} = \underbrace{0_E}_{\substack{Application \\ nulle\ sur\ E}}$$

Sinon il n'en serait pas de même pour notre matrice !

D'où le théorème 4.4

Dimension des sous-espaces spectraux (ou caractéristiques).
Si u est un endomorphisme de E alors on montre que pour toute valeur propre λ de u, la dimension du sous-espace caractéristique associé à λ que l'on note $F_\lambda(u)$ est égal à la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_u.

Caractérisation des endomorphismes trigonalisables à l'aide du polynôme caractéristique.
Comme ses camarades de ce quatrième paragraphe, le théorème qui suit est uniquement valable en dimension finie.

Théorème 4.5 : E est un **K**-espace vectoriel de dimension finie. U est un endomorphisme de E.
Il y a équivalence entre :
(i) u est trigonalisable.
(ii) Il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
(iii) Le polynôme caractéristique de u noté χ_u est scindé sur **K**.

La preuve : *Pour prouver ce théorème, nous allons prouver que chaque assertion implique la suivante. Ainsi nous ferons un cercle qui nous fournira l'équivalence.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Si u est trigonalisable et si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sont ses valeurs propres de u alors nous savons que : $E = \bigoplus_{j=1}^{l} F_{\lambda_j}(u)$.

Notons u_j la restriction de l'endomorphisme u au sous-espace caractéristique F_{λ_j}.

En vertu de ce qui a été démontré en ouverture de ce paragraphe, on peut écrire qu' il existe alors un endomorphisme nilpotent v_j tel que :

$$u_j = \lambda_j . Id_{F_{\lambda_j}} + v_j$$

En application du théorème 4.4, il existe une base B_j du sous-espace F_{λ_j} telle que la matrice de v_j dans cette base soit une matrice triangulaire supérieure. Et même nilpotente !
Par suite la matrice de u_j dans la base B_j en tant que somme d'une matrice diagonale et d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

Comme la somme des sous-espaces propres est directe et vaut E, la famille $B = \bigcup_{j=1}^{l} B_j$ est une base de E.

De plus comme u et $(X - \lambda_j)^{n(\lambda_j)}(u)$ commutent, alors $F_{\lambda_j} = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_j.\mathrm{Id}_E)^{n(\lambda_j)}$ est stable par u.

La matrice de u dans la base B est formée sur sa diagonale des matrices des u_j dans les bases B_j.

En clair, nous avons la chose suivante :

$$\mathrm{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(u_1, B_1) & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Mat}(u_l, B_l) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'ayant sur sa diagonale que des matrices triangulaires supérieures et des 0 ailleurs, elle est elle-même triangulaire supérieure. D'où l'assertion (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soit B cette base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Nous savons que le polynôme caractéristique est défini par :

$$\chi_u = \det\ (X.\mathrm{Id}_n - \mathrm{Mat}\,(u, B)\ )$$

Or la matrice dont on considère le déterminant est elle-même triangulaire supérieure en tant que somme d'une matrice diagonale et d'une matrice t triangulaire supérieure.

Si $a_1, \dots, a_n$ désignent les éléments diagonaux de Mat(u, B) alors il vient que :

$$\chi_u(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - a_j).$$

Autrement dit le polynôme caractéristique de u set scindé sur **K**.
D'où l'assertion (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Pour cette implication, nous allons utiliser l'assertion (ii) du théorème 4.2.
Comme on a un polynôme annulateur de u qui est scindé sur K en la personne χ_u, , u est alors trigonalisable.

D'où le théorème !

La dernière carte : Décomposition de Fitting.
Le théorème suivant qui consacre la décomposition de Fitting est en fait une propriété des endomorphismes trigonalisables c'est-à-dire des endomorphismes dont le polynôme caractéristique est scindé sur **K**.

Théorème 4.6 de décomposition de Fitting.
Si u un endomorphisme de E trigonalisable alors u s'écrit d'une et une seule manière sous la forme

$$u = d + v$$

où d est un endomorphisme diagonalisable et v un autre nilpotent. De plus, v et d commutent.

La preuve : *Pour démontrer ce théorème, nous devons établir l'existence et l'unicité d'un tel couple (v ; d) d'endomorphismes.*

L'existence d'un tel couple.
Comme u est trigonalisable, E est donc somme directe des sous-espaces caractéristiques.
Si λ est une valeur propre de u alors il existe un endomorphisme nilpotent de F_λ noté v_λ tel que :

$$\text{Sur } F_\lambda, \quad u = \lambda.\mathrm{Id}_{F_\lambda} + v_\lambda$$

Notons k_λ l'indice de nilpotence de v_λ.

On construit alors sur E deux endomorphismes d et v tel que :

Si x fait partie d'un sou-espace caractéristique $F_\lambda(u)$ alors $d(x) = \lambda.x$ et $v(x) = v_\lambda(x)$.

Vu que E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u, d et v sont alors parfaitement définis en tant qu'endomorphismes.
Une chose évidente est l'équivalence :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de u} \Leftrightarrow \lambda \text{ est une valeur propre de d.}$$

De plus le sous-espace caractéristique $F_\lambda(u)$ pour u est également le sous-espace propre de d associé à la valeur propre (pour d) λ.
Autrement dit E est somme directe des sous-espaces propres de d.
Ce qui équivaut au fait que d est diagonalisable.
Intéressons-nous à présent à v.
On note $k = \sup_{\lambda\in Sp(u)} k_\lambda$ où Sp(u) désigne le spectre de u c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de u.
Notons $\lambda_1,...,\lambda_l$ les l valeurs propres de u.
Vu que $E = \bigoplus_{j=1}^{l} F_{\lambda_j}$, on a que :

$$\forall\, x\in E, \text{ il existe pour tout } j\in\{1,\ldots,l\}\ x_j\in F_{\lambda_j} \text{ tel que } x = \sum_{j=1}^{l} x_j\ .$$

On regarde alors l'endomorphisme $v^k = \underbrace{v\circ ...\circ v}_{k\ \ fois}$. On peut écrire pour tout $x\in E$:

$$v^k(x) = \sum_{j=1}^{l} v^k(x_j) = \sum_{j=1}^{l} (v_{\lambda_j})^k.(x_j)$$

Vu que $\forall\, j\in\{1,\ldots,l\}\ k_{\lambda_j} \le k$, il vient que pour tout $x\in E$ $v^k(x) = 0$.
Donc v est nilpotent !
De plus comme sur chaque sous-espace caractéristique d et v commutent et que la somme de ceux-ci est E, il vient que d et v commutent sur E.
D'où l'existence du couple !

L'unicité d'un tel couple !
On suppose donc qu'il existe un autre couple $(d_1;v_1)$ tel que $u = d_1 + v_1$ avec d_1 diagonalisable, v_1 nilpotent et ces deux-là qui commutent entre eux !
Soit alors λ une valeur propre de d_1. On considère alors le sous-espace propre associé à la valeur propre λ qu'on notera $E_\lambda(d_1)$.
Vu que v_1 est nilpotent, il existe un entier naturel k' tel que $v_1^{k'} = 0$.
Pour tout x de ce sous-espace propre $E_\lambda(d_1)$, on peut écrire que :

$$v_1^{k'}(x) = 0 = (u - d_1)^{k'}(x)$$

Or sur $E_\lambda(d_1)$, on a : $d_1(x) = \lambda.x$.
Ainsi vient-il qu'il existe k' tel que $(u - \lambda.Id_E)^{k'}.(x) = 0$.
Ainsi a-t-on que $E_\lambda(d_1) \subset F_\lambda(u)$.
Ce qui implique aussi que toute valeur propre de d_1 est valeur propre de u.

A partir de là, comme d_1 est diagonalisable, on a que $E = \bigoplus_{\lambda\in Sp(d_1)} E_\lambda(d_1)$.
Or comme u est diagonalisable (car χ_u scindé sur K), on a également que $E = \bigoplus_{\lambda\in Sp(u)} F_\lambda(u)$.

Il vient que pour tout $\lambda \in Sp(d_1)$ $E_\lambda(d_1) = F_\lambda(u)$.
Sinon E serait un espace de dimension strictement supérieure à n.

Cela nous dit aussi que toute valeur propre de u est valeur propre de d_1.
Sinon E serait un espace de dimension strictement inférieure à n car une valeur propre de u aurait échapper à d_1.
L'important est que sur chacun des sous-espaces caractéristiques $F_\lambda(u)$, on a :

$$d_1 = \lambda.Id = d$$

Or la somme de ces sous-espaces caractéristiques est directe et vaut E.
Cela suffit à définir un endomorphisme sur E. Ainsi vient-il que :
$d_1 = d$
L'unicité de l'endomorphisme d entraîne aussi celle de v. En effet :

$$v_1 = u - d_1 = u - d = v$$

D'où l'unicité du couple !