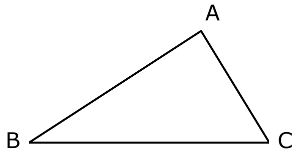
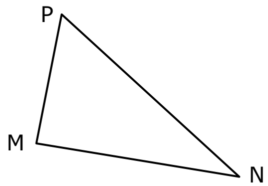
Triangles isométriques et semblables

Triangles isométriques

Le mot "isométrique" est la composition de mot grec *isos* qui signifie même et du terme latin *metrum* qui signifie mesure. Littéralement, deux triangles isométriques sont deux triangles de même mesure.

> **Définition :** Dire que deux triangles sont isométriques <u>signifie que</u> leurs côtés sont deux à deux égaux.





Sur cet exemple, les triangles ABC et MNP sont isométriques.

En effet, on a : $\begin{cases} AB = MN \\ BC = NP \\ AC = MP \end{cases}$

Remarque : deux triangles isométriques sont superposables. Comprenez que l'on peut passer de l'un à l'autre par une série de glissements (translation ou rotation) et de retournements (réflexion = symétrie axiale).
Si l'on reproduisait le triangle MNP sur du papier calque, on pourrait le superposer à ABC.

Deux triangles isométriques partagent bien plus que des côtés de même mesure. Ainsi :

- Deux triangles isométriques ont des angles égaux.
  Avec notre exemple : $\hat{A} = \hat{M}$; $\hat{B} = \hat{N}$ et $\hat{C} = \hat{P}$.
- Deux triangles isométriques ont des aires égales (ils ont les mêmes dimensions).

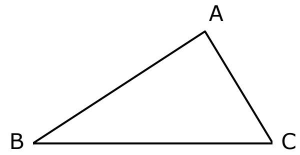
De la même manière qu'il existe plusieurs manières de construire un triangle, l'isométrie de deux triangles peut être caractérisée de plusieurs façons.

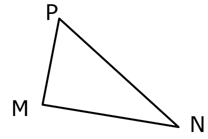
> **Théorème :** ABC et MNP sont deux triangles quelconques.
>
> 1. ***Un angle et ses deux côtés adjacents.***
>
>   Si $\begin{cases} \hat{A} = \hat{M} \\ AN = MN \\ AC = MP \end{cases}$ <u>alors</u> les triangle ABC et MNP sont isométriques.
>
> 2. ***Un côté et ses deux angles.***
>
>   Si $\begin{cases} AB = MN \\ \hat{A} = \hat{M} \\ \hat{B} = \hat{N} \end{cases}$ <u>alors</u> les triangles ABC et MNP sont isométriques

Pour conclure : *Deux triangles sont isométriques si l'on peut passer de l'un à l'autre par toute une série d'isométries, c'est-à-dire de translations, de rotations et de réflexions.*

Triangles semblables

> **Définition :** Dire que deux triangles sont semblables (ou de même forme) <u>signifie que</u> leurs angles sont deux à deux égaux (ou de même mesure).

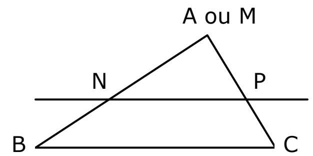




Sur cet exemple, les triangles ABC et MNP sont semblables. En effet : $\begin{cases} \hat{A} = \hat{M} \\ \hat{B} = \hat{N} \\ \hat{C} = \hat{P} \end{cases}$

Note : Comme dans un triangle, la somme des angles est toujours égale à 180°, deux paires d'angles égaux suffisent à faire de deux triangles des triangles semblables.

Conséquence : Nous avons vu que deux triangles isométriques avaient des angles égaux. <u>Deux triangles isométriques sont donc semblables.</u>
Par contre, deux triangles semblables ne sont pas nécessairement isométriques.



Si l'on superpose deux triangles semblables en faisant coïncider les sommets A et M, on aboutit alors à une situation de Thalès. Cela amène à une nouvelle caractérisation de la similitude.

> **Théorème :** Dire que deux triangles sont semblables <u>équivaut à dire que</u> leurs côtés sont deux à deux proportionnels.

Sur notre exemple, les triangles ABC et MNP sont semblables car $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$.
Pour les triangles isométriques, le coefficient de proportionnalité est égal à 1.

Cette configuration de Thalès a une autre conséquence.
A partir d'une paire d'angles et deux paires côtés, il est possible sous certaines conditions de savoir si deux triangles sont de même forme.

> **Théorème :** ABC et MNP sont deux triangles quelconques.
>
> Si $\begin{cases} \hat{A} = \hat{M} \\ \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \end{cases}$ <u>alors</u> les triangles ABC et MNP sont semblables.

Pour conclure : *On passe d'une paire de triangles semblables à une paire d'isométriques en agrandissant ou réduisant l'un des deux triangles...*